Perplexo com as derivadas?
Esse guia simpático oferece a ajuda que você precisa.

2ª Edição

Cálculo

PARA LEIGOS®

FOR DUMMIES®

Aprenda a:

- **Encontrar os valores máximos e mínimos absolutos**
- **Calcular a área sob uma curva**
- **Lidar com área negativa**
- **Diferenciar séries divergentes e convergentes**

Tornando tudo mais fácil!

Mark Ryan

Fundador do Centro de Matemática em Winnetka, Illinois

Cálculo Para Leigos®

Folha de Cola

Tabela geométrica muito boa

Todos os triângulos

$A = \frac{1}{2}\, base \cdot altura$

Triângulo eqüilátero

$A = \frac{lado^2\sqrt{3}}{4}$

Triângulo retângulo

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
(c é a hipotenusa)

Paralelogramo

Área = base · altura

Trapézio

$Área = \frac{base_1 + base_2}{2} \cdot altura$

Círculo

$Área = \pi r^2$
$Circuferência = 2\pi r = \pi d$

Setor do círculo
(pense no pedaço de pizza)

$Área = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{360°}\right)$

(θ é o ângulo central)

$Comprimento\ do\ arco = 2\pi r\left(\frac{\theta}{360°}\right)$

(Comprimento do arco é o comprimento da casca)

Esfera

$Volume = \frac{4}{3}\pi r^3$

$Área\ da\ superfície = 4\pi r^3$

Cone da pirâmide
(base plana, topo pontudo)

$Volume = \frac{1}{3} A \cdot h$

(A é a área da base)

Cilindro circular reto, Prisma reto ou caixa

Volume = A · h
(*A* é a área da base)

Área da superfície lateral = P · altura

(P é o perímetro [ou circunferência] da base)

Geometria de Coordenadas

Dados dois pontos
(x_1, y_1) e (x_2, y_2)

$Inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$Distância = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2}$

$Ponto\ médio = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Tabela trigonométrica rápida

Trigonometria do triângulo retângulo

SohCahToa:

$\text{sen}\,\theta = \frac{O}{H}$ $\quad \text{cosec}\,\theta = \frac{H}{O}$

$\cos\theta = \frac{A}{H}$ $\quad \sec\theta = \frac{H}{A}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{O}{A}$ $\quad \text{cotg}\,\theta = \frac{A}{O}$

Graus e Radianos:

$2\pi\ radianos = 360°$ $\quad \frac{\pi}{3}\ radianos = 60°$

$\pi\ radianos = 180°$ $\quad \frac{\pi}{4}\ radianos = 45°$

$\frac{\pi}{2}\ radianos = 90°$ $\quad \frac{\pi}{6}\ radianos = 30°$

Para converter de radianos para graus, multiplique por $\frac{180°}{\pi}$.

Para converter de graus para radianos, multiplique por $\frac{\pi}{180°}$.

Identidades

Identidades recíprocas:

$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$

Identidades quociente:

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$\text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

Identidade Pitagoreana:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \text{cotg}^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

Fórmulas

Fórmulas do ângulo-metade:

$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

Fórmulas dos ângulos duplos:

$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Fórmulas de redução:

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\,\theta$

Para leigos: A série de livros para iniciantes que mais vende no mundo.

Cálculo Para Leigos®

Folha de Cola

Tabela elegante da derivada

Regra do produto: $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + v'u$ Regra do quociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}cx = c$
4. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
5. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
6. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
7. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
8. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
9. $\frac{d}{dx}\text{sen}x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}x$
11. $\frac{d}{dx}\text{tg}x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\text{cotg}x = -\text{cosec}^2 x$
13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\,\text{tg}x$
14. $\frac{d}{dx}\text{cosec}x = -\text{cosec}x\,\text{cotg}x$
15. $\frac{d}{dx}\text{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $\frac{d}{dx}\text{arctg}x = \frac{1}{1+x^2}$
18. $\frac{d}{dx}\text{arccotg}x = \frac{-1}{1+x^2}$
19. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
20. $\frac{d}{dx}\text{arccosec}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Tabela elegante e útil da integral

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
6. $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$
7. $\int \text{sen}x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\,dx = \text{sen}x + C$
9. $\int \text{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
10. $\int \text{cotg}x\,dx = -\ln|\text{sen}x| + C$
11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \text{tg}x| + C$
12. $\int \text{cosec}x\,dx = -\ln|\text{cosec}x + \text{cot}x| + C$
13. $\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}x + C$
14. $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\text{cotg}x + C$
15. $\int \sec x\,\text{tg}x\,dx = \sec x + C$
16. $\int \text{cosec}x\,\text{cotg}x\,dx = -\text{cosec}x + C$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{a} + C$
18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$
19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsec}\frac{|x|}{a} + C$
20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Para leigos: A série de livros para iniciantes que mais vende no mundo.

Cálculo

PARA LEIGOS®

Mark Ryan

ALTA BOOKS
EDITORA
Rio de Janeiro, 2012

Sobre o Autor

Pós-graduado pela Universidade de Brown e pela Universidade de Direito de Wisconsin e membro do Conselho Nacional de Professores de Matemática, **Mark Ryan**, vem ensinando matemática desde 1989. Ele dirige o Centro de Matemática em Winnetka, Illinois (www.themathcenter.com), onde ensina nos cursos de matemática do ensino médio incluindo uma introdução ao cálculo e um workshop para os pais baseado em um programa que ele mesmo desenvolveu: Os 10 hábitos dos estudantes de matemática mais bem sucedidos. No ensino médio, ele conseguiu obter, duas vezes, uma pontuação de 800 na prova de matemática do SAT. E ele não sabe apenas matemática, ele também tem uma facilidade de explicar tudo com um inglês claro. Ele exerceu a profissão de advogado por 4 anos antes de decidir que deveria fazer algo que gostasse e usar seu talento natural para a matemática – é claro, 4 anos é muito tempo, mas antes tarde do que nunca.

Cálculo Para Leigos é o segundo livro de Ryan. Seu primeiro livro, Everyday Math for Everyday Life (*"Matemática para todos os dias da sua vida"*), foi publicado em 2002.

Um jogador de torneios de gamão e um esquiador e jogador de tênis entusiasmado, Ryan mora em Chicago.

Dedicatória

Para os meus alunos de hoje e para os meus ex-alunos. Que aos ensiná-los, também fui ensinado por eles.

Agradecimentos do Autor

Eu estou muito agradecido – mais uma vez – ao meu agente, Sheree Bykofsky, e sua equipe por ter me arrumado esse livro. Foi uma sorte para mim quando eu me filiei a Sheree Bykofsky Associates, Inc.

Um agradecimento especial ao meu cunhado, Steve Mardiks, e meus amigos Abby Lombardi, Ted Lowitz e Barry Sullivan pelos seus conselhos, edição, e apoio valiosos. Josh Dillon fez um ótimo trabalho verificando o conteúdo sobre cálculo do livro bem como a objetividade do que foi exposto.

Todos na Wiley Publishing foram ótimos de se trabalhar. O editor de aquisições Kathy Cox tem um desejo revigorante sem fim de atender os desejos do leitor. O editor de projeto Tim Gallan tem a mistura certa de paciência e uma atitude de seguir dentro do prazo. Ele é um editor talentoso que entende a floresta, as árvores, quando editar, e quando não editar. O copidesque Laura Peterson fez inúmeros aperfeiçoamentos significativos no livro. E a equipe responsável pelo layout e ilustração fez um ótimo trabalho com as figuras difíceis e complexas do livro. Esse livro é um testamento dos altos padrões de todos da Wiley Publishing.

Sumário Resumido

Sumário

Parte II: Aquecendo-se com os Pré-requisitos do Cálculo........................ 29

Introdução

O simples pensamento de ter que fazer um curso de cálculo já é suficiente para fazer uma legião de estudantes suar frio. Outros que têm a intenção de nunca estudar essa matéria têm a noção de que cálculo é difícil a menos que você seja um descendente direto de Einstein.

Bem, eu estou aqui para dizer a você que você *pode* dominar o cálculo. Não chega a ser tão difícil quanto o seu misticismo leva a crer. A maioria do cálculo é apenas álgebra, geometria e trigonometria avançada. É baseado em e é uma extensão lógica dessas matérias. Se você pode fazer álgebra, geometria e trigonometria, você pode fazer cálculo.

Mas por que você deve se incomodar – exceto pelo fato de ter que fazer um curso? Por que escalar o Monte Everest? Por que ouvir a nona sinfonia de Beethoven? Por que visitar o Louvre para ver a Mona Lisa? Por que ver Os Simpsons? Assim como esses esforços, fazer cálculo pode ser sua própria recompensa. Há muitos que dizem que o cálculo é uma das maiores conquistas de toda a história intelectual. Como tal, vale o esforço. Leia esse livro sem jargões, entenda cálculo, e se junte aos poucos que podem dizer com orgulho: "Cálculo? Ah, é claro, eu sei Cálculo. Não é grande coisa!".

Sobre Este Livro

Cálculo Para Leigos é destinado a três grupos de leitores: Estudantes que estão no seu primeiro curso de cálculo, estudantes que precisam rever cálculo para se preparar para outros estudos, e adultos de todas as idades que gostariam de uma boa introdução ao assunto.

Se você está matriculado em um curso de cálculo e acha que seu livro não é muito claro, este é o livro para você. Ele abrange os tópicos mais importantes do primeiro ano de cálculo: Diferenciação, integração e séries infinitas.

Se você teve cálculo intermediário, mas faz alguns anos, e quer revisar os conceitos para se preparar para, digamos, algum programa de pós-graduação, *Cálculo Para Leigos* vai lhe dar um curso de reciclagem completo e sensato.

Os leitores que não são estudantes vão considerar a exposição clara e acessível. *Cálculo Para Leigos* tira o cálculo de dentro da torre de marfim e o traz de volta a terra.

Este é um livro de matemática amigável. Sempre que possível, eu explico os conceitos de cálculo mostrando as conexões entre as ideias do cálculo e as idéias mais fáceis da álgebra e da geometria. Eu então mostro como os conceitos de cálculo funcionam em exemplos concretos e apenas depois é que mostro as fórmulas de cálculo mais sofisticadas. Todas as explicações são em português claro, e não em linguagem matemática.

Convenções Usadas Neste Livro

As convenções a seguir mantêm o texto consistente e muito fácil de compreender.

- As variáveis estão em *itálico*.
- Os termos do cálculo estão escritos em itálico e definidos logo que aparecem no texto.
- Na resolução de problemas passo a passo, a ação geral que você precisa tomar está em **negrito**, seguida pelas partes específicas do problema em particular.

Como Usar Este Livro

Este livro, como todos os livros Para Leigos, é uma referência, e não uma aula de reforço. Essa abordagem pode parecer um pouco estranha para um livro de matemática, mas a idéia básica é que os capítulos possam valer por si só. Se você não quiser ler o livro de capa a capa, não precisa. Agora, se você é um iniciante absoluto, você provavelmente deve iniciar com o Capítulo 1 e seguir o seu caminho através do livro. Mas se você já conhece cálculo, fique a vontade para pular e ler apenas os tópicos que lhe interessam.

Pode ser uma grande ajuda para realmente entender cálculo – ou, por sinal, qualquer tópico de matemática – focar no ***porquê*** juntamente com o ***de que forma***. Com isso em mente, eu me esforcei muito para explicar a lógica básica de muitas das idéias desse livro. Se você quer dar ao seu estudo de cálculo uma base sólida, você deve ler essas explicações. Mas se você está realmente com pressa, você pode chegar ao ponto e ler apenas as coisas introdutórias importantes, os exemplos, as soluções passo a passo, e todas as regras e definições perto dos ícones. Você pode então ler as explicações restantes somente se sentir necessidade.

Eu acho as informações adjacentes interessantes e divertidas (O que você esperava? Eu as escrevi!). Mas você pode pular elas sem perder nenhum cálculo essencial. Não, você não vai ser testado nessas coisas.

Penso que...

Pode me chamar de doido, mas eu suponho que...

- Você sabe pelo menos o básico da álgebra, geometria e da trigonometria.

  Se você está enferrujado, a Parte II (e a folha de consulta) tem uma boa revisão desses tópicos pré-cálculo. Realmente, se você não está fazendo nenhum curso de cálculo no momento, e você está lendo este livro apenas para satisfazer a sua curiosidade geral sobre cálculo, você pode ter uma imagem conceitual do assunto sem os detalhes pequenos e importantes da álgebra, da geometria e da trigonometria. Mas você não vai, neste caso, estar apto a acompanhar todas as soluções dos problemas. Em resumo, sem o material do pré-cálculo, você pode ver a *floresta* do cálculo, mas não as *árvores*. Se você está matriculado em um curso de álgebra, você não tem escolha – você tem que saber das árvores.

- Você está disposto a ter algum t_ _ _ _ _ _ _.

  Sim, é t-r-a-b-a-l-h-o, trabalho. Eu tentei fazer esse material o mais acessível possível, mas é cálculo afinal de contas. Você não pode aprender cálculo apenas ouvindo uma fita no seu carro ou tomando uma pílula – pelo menos ainda não.

Isso é pedir muito?

Como Este Livro é Organizado?

O livro é dividido em partes, as partes são divididas em capítulos e os capítulos são divididos em tópicos e subtópicos (Eu pedi a patente para esse esquema).

Parte I: Uma visão geral do cálculo

Depois de ler a Parte I, você vai ser um dos poucos que pode realmente responder as seguintes perguntas: "O que é cálculo?", "Para que Serve?" e "Como ele funciona?". Eu discuto aqui muitos usos práticos do cálculo e como ele tem mudado o mundo de maneiras incontáveis. Eu explico, em português claro, as duas *grandes* idéias do cálculo: *diferenciação* e *integração*. Finalmente, eu mostro a você a idéia matemática chave que faz o cálculo funcionar: o conceito de *limite*.

Parte II: Se aquecendo com os pré-requisitos do cálculo

A Parte II é uma revisão da álgebra (incluindo funções) e trigonometria (incluindo geometria) que você precisa para cálculo. Se você não precisa dessa revisão, pule, ou apenas use como referência. Se, por outro lado, você está um pouco enferrujado, não seria uma má idéia revisar essa parte – pelo menos passar uma vista pela revisão. Você não pode fazer cálculo sem esses pré-requisitos – especialmente álgebra.

Parte III: Limites

A matemática dos limites é toda baseada em cálculo. Limites nos permitem de certa forma, ampliar um gráfico de uma curva – mais e mais e mais até o infinito – até que fique em linha reta. Uma vez em linha reta, a velha álgebra e geometria básica podem ser usadas. Essa é a mágica do cálculo.

Parte IV: Diferenciação

Diferenciação é a primeira das duas grandes idéias do cálculo; integração (Parte V) é a segunda. A Diferenciação e a integração são a essência do currículo do cálculo. Diferenciação é o processo de encontrar uma derivada, e uma derivada é apenas uma relação como *quilômetros por hora* ou *reais por unidade*. No gráfico de uma curva, a derivada diz a você a inclinação da curva.

Nessa parte, você vai descobrir regras de diferenciação para iniciantes, regras de diferenciação para especialistas, o que a derivada diz a você sobre o formato da curva, e como usar a derivada para resolver problemas.

Parte V: Integração e séries infinitas

Integração, a grande idéia número dois, é uma adição sofisticada – muito sofisticada. Isso é tudo que ela é. Em poucas palavras, é o processo de pegar o formato de uma área que você não pode determinar diretamente, dividir em pequenos pedaços cujas áreas você *pode* determinar, e depois somar todos os pedaços para achar a área do todo. Essa parte lhe dá o furo sobre técnicas de integração para iniciantes, técnicas de integração para especialistas, integração numérica ou aproximada, e como usar a integração para fazer problemas.

E sobre as séries infinitas? Pense nisso por um instante: Se você começa a uma distância de 1 jarda de uma parede e depois anda metade do espaço, e depois mais uma metade, e depois mais uma metade (Eu aposto que você já ouviu isso), quanto tempo você vai levar para chegar à parede? Resposta: Depende. Há números infinitos de passos nesse processo, então, se cada passo leva, digamos, 1 segundo, você nunca vai chegar lá. Se, no entanto, você pode manter uma velocidade constante de, digamos, 1 *jarda por segundo*, sem parar e diminuir ao final de cada passo, você ainda vai dar um número infinito de passos, mas você vai chegar lá em exatamente 1 segundo!

Esse surpreendente resultado de somar um número infinito de passos, mas obter uma soma *finita,* é o que o último capítulo da Parte V abrange: é um tópico cheio de paradoxos bizarros.

Parte VI: A parte dos "dez"

Aqui você vai encontrar três listas dos 10 mais: dez coisas para lembrar, dez coisas para esquecer, e dez coisas com as quais você pode escapar se seu professor de cálculo nasceu ontem (meu favorito).

Ícones Usados Neste Livro

Mantenha seus olhos nesses ícones:

Perto deste ícone estão regras essenciais de cálculo, definições, e fórmulas que você deve definitivamente saber.

Essas são coisas que você precisa saber da álgebra, geometria, ou trigonometria, ou coisas que você deve se lembrar de algum lugar do começo do livro.

O ícone do centro do alvo aparece perto de coisas que vão tornar a sua vida mais fácil. Anote.

Esse ícone destaca erros comuns de cálculo. Preste atenção.

Em contraste ao conceito de cálculo crítico, você geralmente não precisa memorizar as fórmulas sofisticadas perto deste ícone a não ser que seu professor de cálculo insista.

De Lá para Cá, Daqui para Lá

Para o Capítulo 1, é claro, se você quer começar pelo começo. Se você já tem alguma base em cálculo ou precisa de apenas um curso de reciclagem em uma área ou outra, então fique a vontade para pular algumas coisas. Use o sumário e o índice remissivo para achar o que você está procurando. Se tudo estiver indo bem, em mais ou menos um ano, você vai estar apto a ticar o cálculo na sua lista:

____ Correr uma maratona

____ Saltar sem pára-quedas

____ Escrever um livro

__✓__ Aprender cálculo

____ Nadar no Canal da Mancha

____ Curar o câncer

____ Escrever uma sinfonia

____ Dar um salto de 360° invertido no X-Games

Para o resto da sua lista, você vai ter que resolver tudo sozinho.

Parte I
Uma Visão Geral do Cálculo

Nesta parte...

Eu respondo as perguntas sempre feitas: "O que é Cálculo?", "Para que serve?" e "Como ele funciona?". Eu enumero aqui muitos usos práticos do cálculo e como ele tem mudado o mundo em incontáveis maneiras. Eu explico as duas grandes ideias do cálculo: diferenciação e integração. Por fim, eu mostro a você a ideia-chave matemática que faz com que o cálculo funcione: O conceito de limite.

Capítulo 1
O que é Cálculo?

Neste Capítulo

- Você está apenas na página 1 e você já tem uma prova de cálculo
- Cálculo – é apenas matemática básica modificada
- Dar um close é a chave
- O mundo antes e depois do cálculo

“Meu melhor dia na turma de Cálculo 101 na Universidade da Califórnia do Sul foi o dia que eu tive que faltar aula para fazer um canal”.

- Mary Johnson

“Eu continuo a ter o mesmo sonho onde meu professor de cálculo me persegue com um machado”.

- Tom Franklin, aluno do 2° ano da Faculdade do Colorado

“Cálculo é divertido, e é muito fácil. Eu não entendo porque tanto auê”.

- Sam Einstein, bisneto de Einstein

Neste capítulo, eu respondo a pergunta “O que é cálculo?” em português claro e mostro exemplos do mundo real de como o cálculo é usado. Depois de ler isso e dois pequenos capítulos a seguir, você *vai* entender o que é cálculo. Mas, vamos inverter, por que você não começa pelo contrário, verificando o quê o cálculo não é ?

O que o Cálculo Não É

Não faz sentido adiar o inevitável. Você está pronto para o seu primeiro teste de cálculo? Responda verdadeiro ou falso.

V F A não ser que você seja um nerd, você não tem que se meter com cálculo.

V F Estudar cálculo é prejudicial à saúde.

V F Cálculo é totalmente irrelevante.

Falso, falso, falso! Há essa lenda sobre o cálculo de que ele é extremamente difícil, uma matéria tão misteriosa que ninguém em sã consciência estudaria a não ser que fosse um curso obrigatório.

Não se deixe convencer por esse mito. É claro que cálculo é difícil – Eu não vou mentir para você – mas é administrável, passível de ser feito. Você conseguiu sobreviver à álgebra, geometria e trigonometria. Bem, cálculo apenas começa onde essas matérias terminam – é simplesmente o próximo passo em uma progressão lógica.

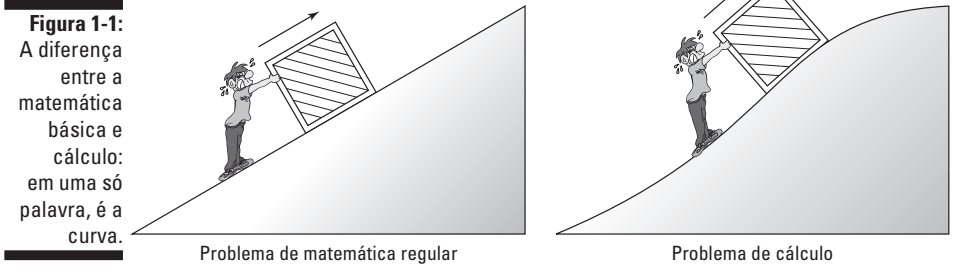
E cálculo não é uma língua morta como o latim, falada apenas por professores. É a linguagem dos engenheiros, cientistas e economistas – ok, então é uma linguagem um pouco fora da sua vida diária e pouco provável de surgir em um coquetel. Mas o trabalho desses engenheiros, cientistas e economistas tem um grande impacto no seu dia a dia – desde o seu microondas, telefone celular, TV, e carro até os remédios que você toma, os mecanismos da economia, e a sua segurança nacional. Neste exato momento, algo ao seu alcance ou à sua vista foi impactado pelo cálculo.

Então, o Que é o Cálculo?

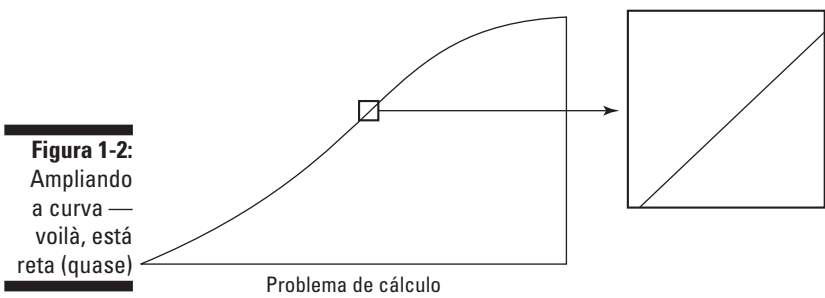
Cálculo é basicamente toda a álgebra e geometria avançada. Em certo sentido, não é nem uma nova matéria – ele pega as regras corriqueiras da álgebra e da geometria e as ajusta para que possam ser usadas em problemas mais complicados (O problema, claro, é aquele *outro* sentido no qual cálculo *é* uma matéria nova e mais difícil).

Veja a Figura 1-1. Na esquerda tem um homem empurrando uma caixa em uma rampa com inclinação em linha reta. Na direita, o homem está empurrando a mesma caixa em uma rampa com inclinação curva. O problema, em ambos os casos, é determinar a quantidade de energia necessária para empurrar a caixa até o topo. Você pode fazer o problema da esquerda usando matemática básica. Para o da direita, você precisa do cálculo (supondo que você não saiba dos atalhos da física).

Para a rampa com uma inclinação em linha reta, o homem empurra com uma força *constante*, e a caixa sobe a rampa com uma velocidade *constante*. Com algumas fórmulas simples da física e da matemática básica (incluindo álgebra e trigonometria), você pode calcular quantas calorias de energia são necessárias para empurrar a caixa na rampa. Note que a quantidade de energia gasta em cada segundo continua a mesma.

Figura 1-1: A diferença entre a matemática básica e cálculo: em uma só palavra, é a curva.

Para a rampa com inclinação curva, por outro lado, as coisas estão *mudando* constantemente. A inclinação da rampa está *mudando* – e não apenas em incrementos como, por exemplo, é uma inclinação para os primeiros 10 pés e depois uma inclinação diferente para os próximos 10 pés – está *constantemente mudando*. E o homem empurra com uma força que está *constantemente mudando* – quanto mais inclinada é a rampa, mais pesado fica empurrar a caixa. Como resultado, a quantidade de energia gasta também está *mudando*, não a cada segundo ou a cada milésimo de segundo, mas *constantemente mudando* de um momento para o outro. É isso que o faz ser um problema de cálculo. Por agora, não deve ser surpresa para você que o cálculo seja descrito como "a matemática da mudança". Cálculo pega as regras básicas da matemática e aplica em problemas flexíveis e desdobráveis.

Para o problema com inclinação curva, as fórmulas da física continuam as mesmas, e a álgebra e a trigonometria que você usa continua a mesma. A diferença é que – em contraste ao problema da rampa com inclinação reta, onde você de certa forma pode fazer num piscar de olhos – você tem que dividir o problema da inclinação curva em pedaços pequenos e fazer cada pedaço separadamente. A Figura 1-2 mostra uma pequena parte da inclinação curva ampliada em muitas vezes o seu tamanho.

Figura 1-2: Ampliando a curva — voilà, está reta (quase)

Quando você amplia o suficiente, o pequeno comprimento da inclinação curva se torna praticamente reto. Depois, pelo fato de estar reto, você pode resolver esse pequeno pedaço da mesma maneira que o problema com

a inclinação em linha reta. Cada pequeno pedaço pode ser resolvido da mesma maneira, e depois você tem que apenas somar todos os pedaços.

Isso é cálculo em poucas palavras. É preciso de um problema que não possa ser feito com a matemática básica porque as coisas estão constantemente mudando – as quantidades mudadas são vistas no gráfico como curvas – elas são ampliadas na curva até que se tornem retas, e depois deixe a matemática regular terminar o problema.

O que torna o cálculo uma fantástica realização é que ele realmente amplia *infinitamente*. Na realidade, tudo que você faz em cálculo envolve o infinito de uma maneira ou de outra, porque se algo está constantemente mudando, está freqüentemente mudando infinitamente de cada infinitesimal momento até o próximo.

Exemplos de Cálculo no Mundo Real

Assim, com a matemática básica você pode fazer o problema com a inclinação em linha reta; com cálculo você pode fazer o problema com a inclinação curva. Aqui tem mais alguns exemplos.

Com a matemática básica você pode determinar o comprimento de um cabo subterrâneo que corre diagonalmente de uma quina de um parque para a outra. Com cálculo você pode determinar o comprimento de um cabo subterrâneo entre duas torres que tem o formato de uma catenária (que por sinal é diferente de um arco circular simples ou uma parábola). Saber o comprimento certo é de extrema importância para uma empresa de energia elétrica planejando centenas de milhas de cabos elétricos novos. Veja a Figura 1-3.

Problema de cálculo:
Qual o comprimento do cabo?

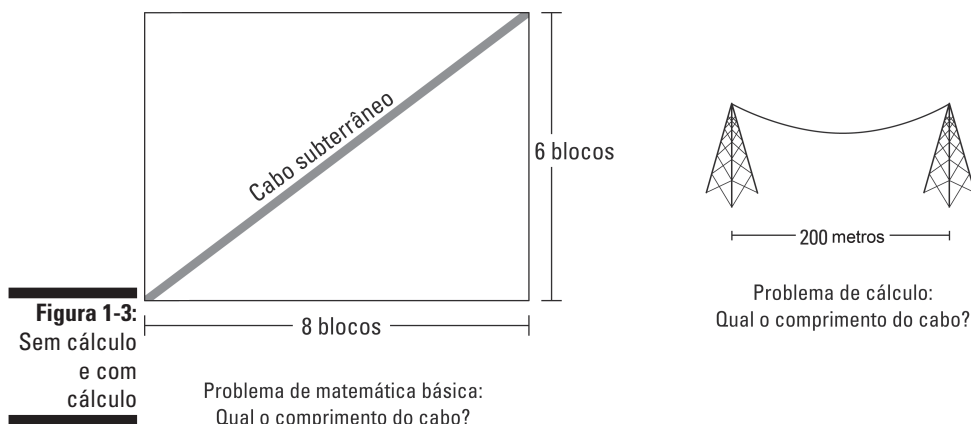
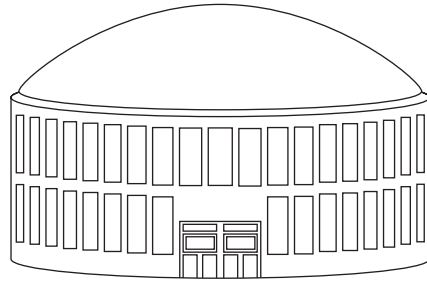
Figura 1-3: Sem cálculo e com cálculo

Você pode calcular a área do telhado plano de uma casa usando a matemática básica. Com o cálculo você pode calcular a área de uma figura mais complicada e não esférica como a abóbada do Houston Astrodome. Os arquitetos desenhando tal construção precisam saber a área da abóbada para determinar o custo dos materiais e para descobrir o peso da abóbada (com ou sem neve). O peso, claro, é necessário para planejar a resistência da estrutura de suporte. Dê uma olhada na Figura 1-4.

Figura 1-4: Sem cálculo e com cálculo.

Com a matemática e a física básicas, você pode calcular a distância que um zagueiro deve lançar a bola para o atacante para completar o passe. Note que o atacante corre em uma linha *reta* e a uma velocidade *constante*. Mas quando a NASA, em 1975, calculou a trajetória necessária para o satélite Viking I chegar até Marte, ela precisou de cálculo porque tanto a Terra como Marte giram em órbitas *elípticas* (de diferentes formas) e as velocidades de ambas estão *constantemente mudando* – sem mencionar o fato de que no seu caminho para Marte, a nave espacial é afetada pela diferente e *constante mudança* da atração gravitacional da Terra, da lua, de Marte, e do sol. Veja a Figura 1-5.

Você verá muitas aplicações do cálculo no mundo real ao longo desse livro. Todos os problemas de diferenciação na Parte IV envolvem a inclinação da curva – como a inclinação da rampa curva na Figura 1-1. Na Parte V, você fará problemas de integração como o problema do comprimento do cabo mostrado na Figura 1-3. Esses problemas envolvem dividir algo em seções menores, calcular cada seção, e depois somar as seções para obter o total. O Capítulo 2 tem mais sobre isso.

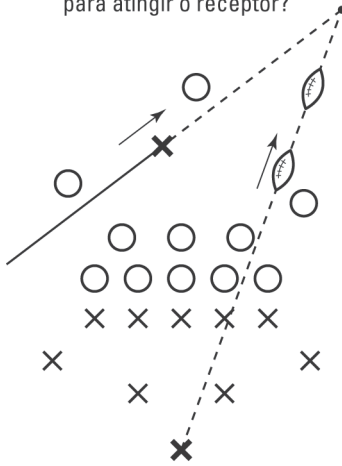
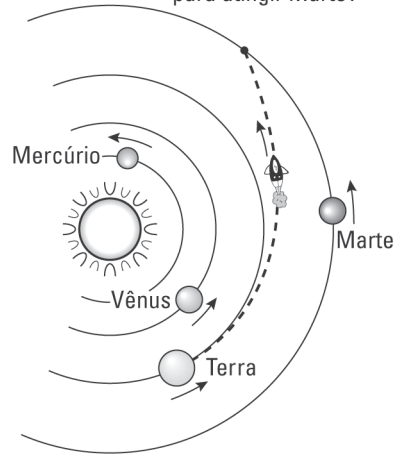



Figura 1-5: A.E.C(Antes da Era do Cálculo) e E.C (Era do Cálculo)

Capítulo 2

As Duas Grandes Ideias do Cálculo: Diferenciação e Integração

Neste Capítulo

- Investigando profundamente a derivada: É uma razão ou uma inclinação
- Investigando a integral – adição para especialistas
- Séries infinitas: Aquiles versus a tartaruga – façam suas apostas

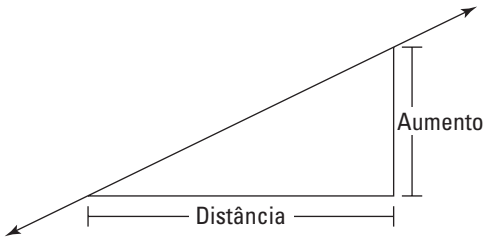
Esse livro abrange dois tópicos principais em cálculo – diferenciação e integração – assim como um terceiro tópico, séries infinitas. Todos os três tópicos tocam o céu e a terra porque todos são montados com base nas regras da matemática usual e todos envolvem a ideia de infinito.

Definindo a Diferenciação

Diferenciação é o processo de achar a *derivada*, e a derivada de uma curva é apenas um termo sofisticado do cálculo para a inclinação da curva; a inclinação de uma curva é também uma simples razão como *quilômetros por hora ou lucro por item*.

A derivada é uma inclinação

Em álgebra, você aprendeu sobre a inclinação da reta – é igual à razão entre o *aumento* e a *distância*. Em outras palavras, $\text{Inclinação} = \frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$. Veja a Figura 2-1. Deixe-me adivinhar: uma repentina saudade de álgebra está tomando conta de você.

Figura 2-1: A inclinação de uma linha é igual ao *aumento* sobre a *distância*.

Na Figura 2-1, o *aumento* é mais ou menos metade do tamanho da *distância*, assim a linha tem uma inclinação de mais ou menos ½ .

Em uma curva, a inclinação está constantemente *mudando* então você precisa do cálculo para determinar sua inclinação. Veja a Figura 2-2.

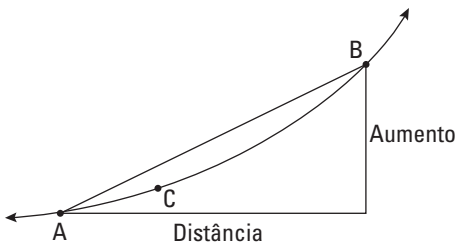
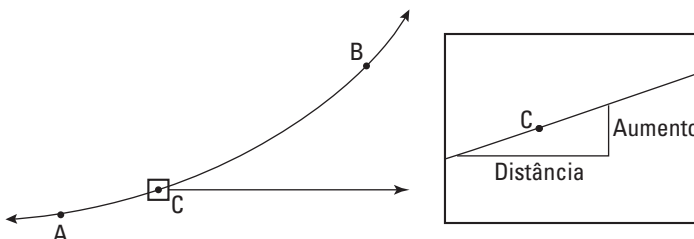
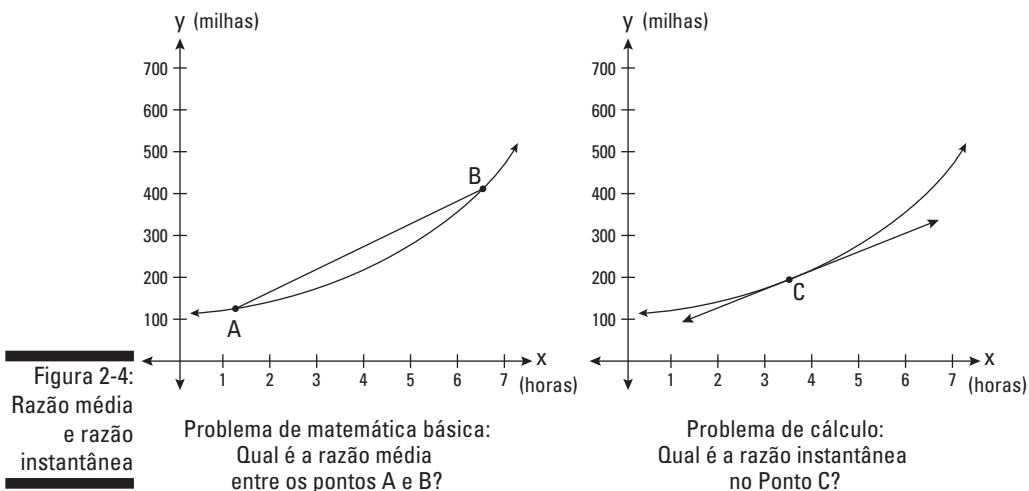
Figura 2-2: A inclinação de uma curva não é tão simples

Assim como a linha na Figura 2-1, a linha da Figura 2-2 tem uma inclinação de mais ou menos ½ . E a inclinação dessa linha é a mesma em cada ponto entre A e B. Mas você pode ver que, ao contrário da linha, a inclinação da curva está mudando entre A e B. No ponto A, a curva é menos inclinada do que a linha, e no ponto B a curva é mais inclinada do que a linha. O que você faz quando quer a inclinação exata no, digamos, ponto C? Você pode adivinhar? Tempo esgotado. Resposta: Você amplia. Veja a Figura 2-3.

Figura 2-3: Ampliando a curva.

Quando você amplia bastante – muito, na verdade, ao *infinito* – o pequeno pedaço da curva se torna reta, e você pode descobrir a inclinação da maneira antiga. É assim que a diferenciação funciona.

A derivada é uma razão

Visto que a derivada de uma curva é a inclinação – que é igual ao $\frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$ ou *aumento por distância* – a derivada é também uma razão, um *disso por aquilo* como, por exemplo, *quilômetros por hora* ou *litros por minuto* (o nome de uma razão em particular depende simplesmente das unidades usadas nos eixos *x* e *y*). Os dois gráficos na Figura 2-4 mostram a relação entre distância e tempo – elas podem representar uma viagem no seu carro.

Figura 2-4: Razão média e razão instantânea

Um problema de álgebra básica é mostrado à esquerda na Figura 2-4. Se você sabe onde estão os pontos A e B, você pode determinar a inclinação entre A e B, e, nesse problema, essa inclinação lhe dá a razão *média* em *quilômetros por hora* para o intervalo de A até B.

Para o problema da direita, por outro lado, você precisa do cálculo. Usando a derivada da curva, você pode determinar a inclinação *exata* no ponto C. Logo à esquerda de C a inclinação é menor, e logo à direita de C a inclinação é maior. Mas exatamente no ponto C, por um único momento infinitesimal, você acha uma inclinação diferente das inclinações dos seus vizinhos. A inclinação para este ponto infinitesimal único na curva dá a você a razão *instantânea* em *quilômetros por hora* no ponto C.

Investigando a Integração

Integração é a segunda grande idéia em cálculo, e é basicamente apenas uma adição mais sofisticada. Integração é o processo de dividir uma área em pequenas seções, descobrir as áreas dessas seções menores, e depois

somar os pequenos pedaços da área para achar a área total. A Figura 2-5 mostra dois problemas de área – um que você pode fazer usando a geometria e um onde você precisa do cálculo.

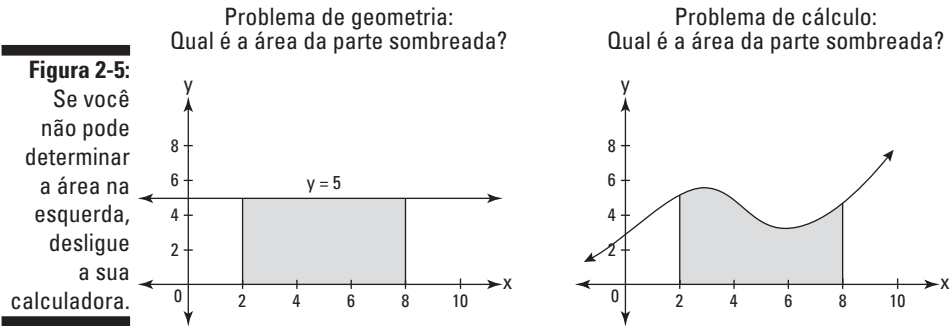
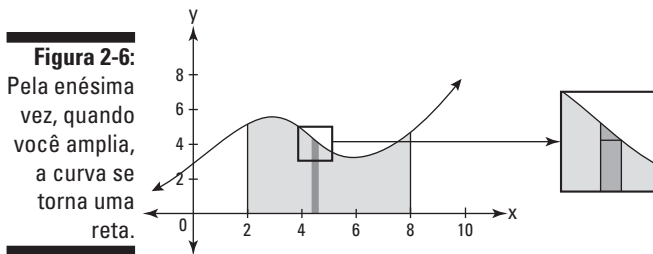
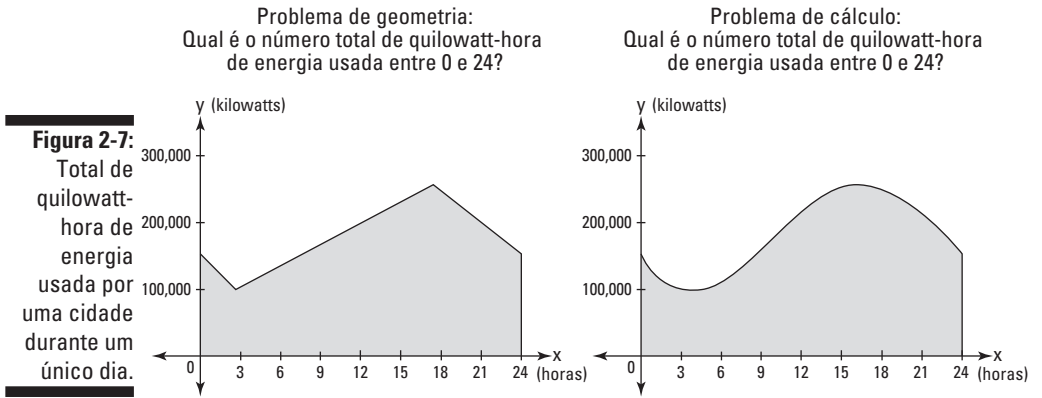
Figura 2-5: Se você não pode determinar a área na esquerda, desligue a sua calculadora.

A área sombreada na esquerda é um retângulo simples, então sua área, é claro, é igual à base vezes a altura. Mas você não pode descobrir a área da direita com a geometria básica porque não há uma fórmula para essa figura engraçada. Então, o que você faz? Você amplia, é claro. A Figura 2-6 mostra a porção de cima de uma faixa estreita da figura estranha ampliada em muitas vezes o seu tamanho.

Figura 2-6: Pela enésima vez, quando você amplia, a curva se torna uma reta.

Quando você amplia como mostrado na Figura 2-6, a curva se torna praticamente reta, e quanto mais você amplia, mais reta ela fica – com a integração, você realmente amplia a uma distância *infinita*, de certa forma. Você acaba ficando com o formato da direita na Figura 2-6, que é um simples trapezóide – ou, se você quiser ser bem básico, é um triângulo sentado no topo de um retângulo. Visto que você pode calcular as áreas dos retângulos, triângulos e trapezóides com a geometria básica, você pode ter a área disso e de todos os outros pedaços finos e depois somar todas essas áreas para obter a área total. Isso é integração.

A Figura 2-7 mostra dois gráficos do consumo de energia elétrica de duas cidades em um dia típico de verão. O eixo horizontal representa o número de horas depois da meia-noite, e o eixo vertical a quantidade de potência (em quilowatts) usada por uma cidade em diferentes horas durante o dia.

Figura 2-7: Total de quilowatt-hora de energia usada por uma cidade durante um único dia.

A linha deformada na esquerda e a linha curva na direita mostram como o número de quilowatts de potência depende da hora do dia. Em ambos os casos, a área sombreada dá o número de quilowatts-hora de energia consumida durante um período típico de 24 horas. O problema super simplificado da esquerda pode ser feito usando geometria básica. Mas a relação entre a quantidade de potência usada e a hora do dia é mais complicada do que uma linha reta deformada, assim você precisa do cálculo para determinar a área total. No mundo real, a relação entre as diferentes variáveis é raramente tão simples quanto um gráfico de uma linha reta. É isso que torna o cálculo tão útil.

Classificando as Séries Infinitas

Séries infinitas lidam com a soma de um número infinito de números. Não tente isso na sua calculadora – ao não ser que você tenha muito tempo livre. Aqui temos um exemplo simples. A sequência de números a seguir é gerada por um processo de duplicação simples – cada termo é duas vezes o seu antecessor:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...$$

As *séries* infinitas associadas com essa *sequência* de números é apenas a soma dos números:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + ...$$

Séries divergentes

A séria acima de números duplicados é *divergente* porque se você continuar a adição indefinidamente, a soma vai crescer sem limite. E se você pudesse somar "todos" os números nessa série – isto é, todos os *infinitamente* muitos deles – a soma seria infinita. *Divergente* normalmente significa – há exceções – que as séries tendem ao infinito.

Séries divergentes são pouco interessantes porque elas fazem o que você espera. Você fica somando mais números, assim a soma continua aumentando, e se você continuar com isso para sempre, a soma tende para o infinito. Grande surpresa.

Séries convergentes

Séries *convergentes* são muito mais interessantes. Com uma série convergente, você também continua somando uma grande quantidade de números, a soma continua crescendo, mas mesmo você somando números continuamente e a soma crescendo eternamente, a soma de todos os muitos termos infinitamente é um número *finito*. Esse resultado surpreendente me recorda o famoso paradoxo de Zeno, de Aquiles e a tartaruga (Quer dizer Zeno de Elea, é claro, do século V a.C.).

Aquiles está participando de uma corrida com uma tartaruga – um guerreiro corajoso, hein? Nosso generoso herói dá para a tartaruga uma vantagem de 100 metros. Aquiles corre a uma velocidade de 36 quilômetros por hora; a tartaruga "corre" a uma velocidade de 3,6km/h. Zeno usou o seguinte argumento para "provar" que Aquiles nunca vai alcançar ou passar a tartaruga. A propósito, se você se sentir persuadido por essa "prova", você realmente tem que sair mais.

Imagine que você é um jornalista cobrindo uma corrida para a *Spartan Sports Weekly*, e você está tirando uma série de fotos para o seu artigo. A Figura 2-8 mostra a situação no começo da corrida e nas suas duas primeiras fotos.

Você tira a sua primeira foto instantânea no momento em que Aquiles chega ao ponto que a tartaruga começou. Na hora que Aquiles chega nesse ponto, a tartaruga "correu" e está agora a 10 metros na frente de Aquiles (A tartaruga se move a um décimo da velocidade de Aquiles, então o tempo que Aquiles leva para viajar 100 metros, a tartaruga cobre um décimo dessa distância, ou seja 10 metros). Se você fizer as contas vai descobrir que Aquiles levou 10 segundos para correr 100 metros (Se você havia achado estranho os números de 36 e 3,6km/h, agora eles fazem sentido!).

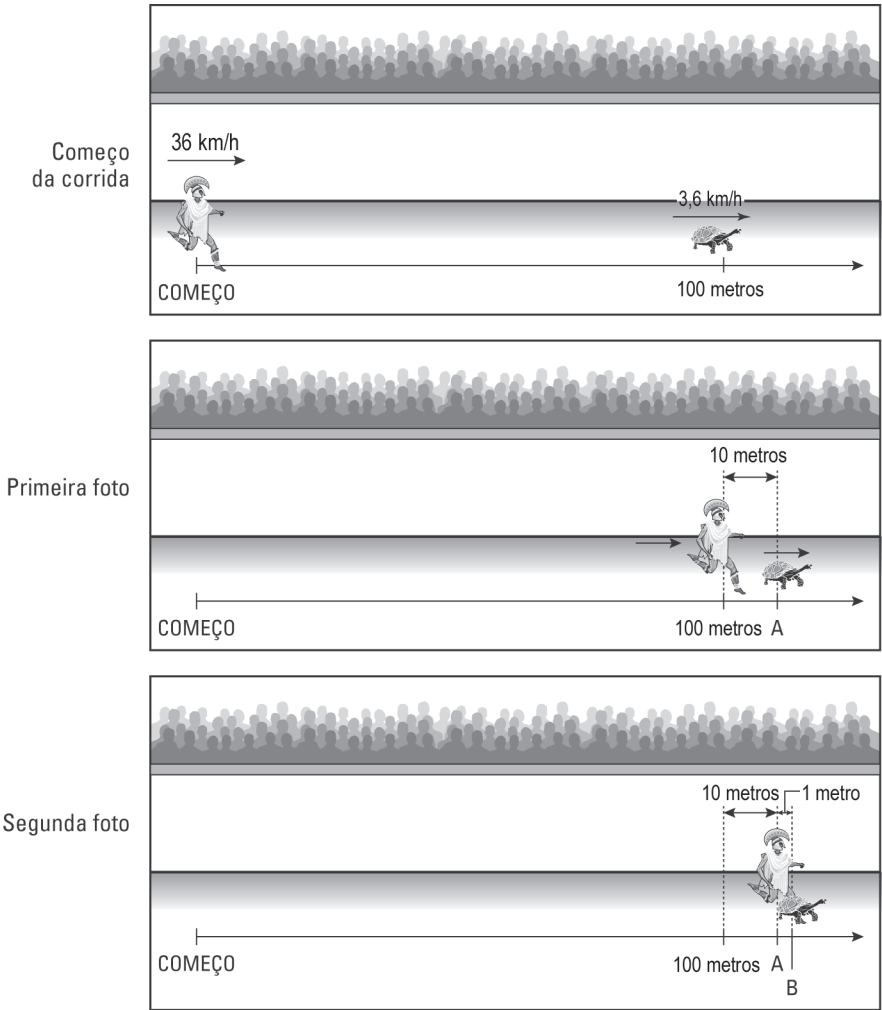



Figura 2-8: Aquiles versus a tartaruga — é final apertado

Você tem uma Polaroid bem rápida, então você olha para a sua primeira foto e anota precisamente onde a tartaruga está quando Aquiles cruza o ponto de partida da tartaruga. A posição da tartaruga é o ponto A na primeira foto na Figura 2-8. Em seguida você tira a sua segunda foto quando Aquiles chega ao ponto A, o que leva mais um segundo. Nesse segundo, a tartaruga moveu para o ponto B. Você tira a sua terceira foto (não mostrada) quando Aquiles chega ao ponto B e a tartaruga move para o ponto C.

Toda vez que Aquiles chega ao ponto onde a tartaruga estava, você tira outra foto. Essa série de fotografias não tem fim. Supondo que você e sua câmera possam trabalhar infinitamente rápido, você vai tirar um número infinito de fotos. E *toda vez* que Aquiles chega ao ponto em que a tartaruga estava, a tartaruga terá andado mais um pedaço – mesmo que

somente um milímetro ou um milésimo de um milímetro. Desse modo, o argumento vale, porque você nunca vai poder chegar ao fim da sua série infinita de fotos, e Aquiles nunca vai poder alcançar a tartaruga.

Bem, como todo mundo sabe, Aquiles, de fato, alcança e ultrapassa a tartaruga – aí está o paradoxo. A matemática de uma série infinita explica como essa série infinita de intervalos de tempo tende para uma quantidade de tempo ***finita*** – o tempo exato de quando Aquiles ultrapassa a tartaruga. Aqui está a soma para os que são curiosos:

$$10s + 1s + 0{,}1s + 0{,}01s + 0{,}001s + \ldots = 11{,}11\ldots s, \text{ ou } 11\frac{1}{9} \text{ segundos.}$$

Aquiles ultrapassa a tartaruga depois de $11\frac{1}{9}$ segundos na marca de 111 1/9 metros.

Séries infinitas é um tópico cheio de coisas bizarras, paradoxos absurdos. Você vai ver mais na Parte V.

Capítulo 3

Por que o Cálculo Funciona?

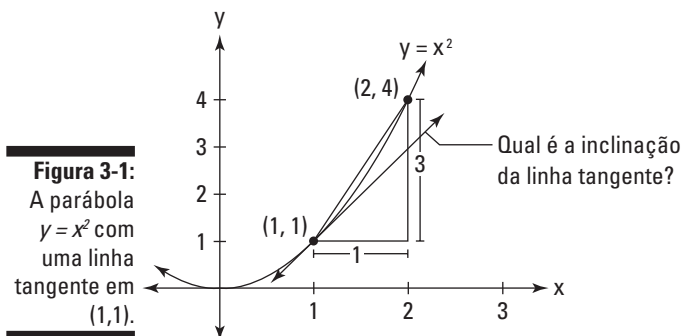
Neste Capítulo

- Usando limites para ampliar uma curva
- Inclinação *é igual a* aumento sobre *distância*
- Área de um triângulo *é igual à* base *vezes* altura *sobre dois*
- O Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Se você leu os Capítulos 1 e 2, você ouviu muito sobre o processo de ampliar uma curva até que ela pareça reta. A matemática do cálculo funciona por causa dessa natureza básica das curvas – que elas são *localmente retas* – em outras palavras, curvas são retas quando vistas em um microscópio. A terra é redonda, mas para nós ela parece plana porque nós meio que estamos embaixo de um microscópio quando comparados ao tamanho da terra. Cálculo funciona porque uma vez que as curvas sejam retas, você pode usar a álgebra e a geometria básica com elas. O processo de ampliação é alcançado através da matemática dos limites.

O Conceito do Limite: Um Microscópio Matemático

A matemática dos *limites* é o microscópio que amplia uma curva. Aqui está como um limite funciona. Digamos que você precisa da inclinação exata de uma parábola $y = x^2$ no ponto (1,1). Veja a Figura 3-1.

Figura 3-1: A parábola $y = x^2$ com uma linha tangente em (1,1).

Com a fórmula da inclinação usada em álgebra, você pode descobrir a inclinação de uma reta entre os pontos (1,1) e (2,4). De (1,1) para (2,4) você anda 1 casa e sobe 3, então a inclinação é $\frac{3}{1}$ ou apenas 3. Mas você pode ver na Figura 3-1 que essa linha é mais inclinada do que a linha tangente no ponto (1,1) que mostra a inclinação da parábola nesse ponto específico. De certa forma, o processo do limite deixa você deslizar para baixo o ponto que começa em (2,4) até o ponto (1,1) até que esteja a um milésimo de milímetro afastado, depois um milionésimo, depois um bilionésimo, e assim sucessivamente até o nível de um microscópio. Se você fizer as contas, as inclinações entre o ponto (1,1) e o seu ponto móvel vão se parecer mais ou menos com 2,001; 2,000001; 2,000000001; e assim por diante. E com a quase mágica matemática dos limites, você pode concluir que a inclinação em (1,1) é exatamente 2, mesmo que o ponto móvel nunca chegue em (1,1) (Se ele chegasse, você só teria um ponto sobrando e você precisa de dois pontos separados para poder usar a fórmula da inclinação). A matemática dos limites é toda baseada nesse processo de ampliação, e ele funciona, novamente, porque quanto mais você amplia, mas reta a curva fica.

O Que Acontece Quando Você Amplia

A Figura 3-2 mostra três diagramas de uma curva e três coisas que você talvez goste de saber sobre a curva: 1) a inclinação exata no ponto C, 2) a área abaixo da curva entre os pontos A e B, e 3) o comprimento exato da curva entre os pontos A e B. Você não pode responder essas perguntas com matemática básica porque as fórmulas da matemática básica para *inclinação*, *área* e *comprimento* funcionam para linhas retas (e curvas simples como círculos), mas não para curvas estranhas como essa aqui.

A primeira fileira da Figura 3-3 mostra um detalhe ampliado dos três diagramas da curva na Figura 3-2. A segunda fileira mostra uma ampliação, maior e a terceira fileira outra ampliação. Você pode ver como cada ampliação torna as curvas cada vez mais retas e cada vez mais perto da linha diagonal. Esse processo é continuado indefinidamente.

Finalmente, a Figura 3-4 mostra o resultado depois de um número "infinito" de ampliações – mais ou menos. Você pode pensar sobre os comprimentos 3 e 4 na Figura 3-4 (sem trocadilhos) como 3 e 4 milionésimos de um milímetro, não, faça isso 3 e 4 bilionésimos de um milímetro, não, trilionésimos, não, zilionésimos...

Figura 3-2: Uma curva — três perguntas

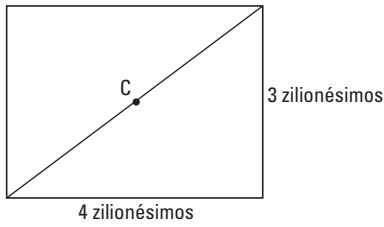
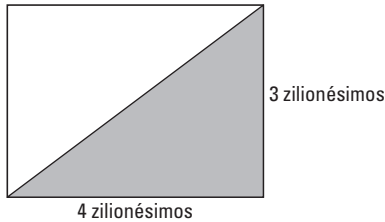
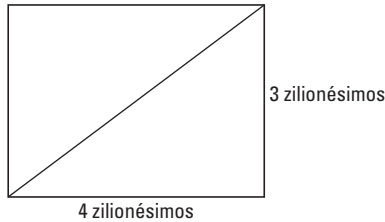
Figura 3-3: Amplie até o nível de um microscópio.

Inclinação é igual à $\frac{\text{aumento}}{\text{distância}}$
então a inclinação da diagonal é $\frac{3}{4}$

A área de um triângulo é igual a
$\frac{1}{2}$ base × altura, então a área é
6 zilionésimos ao quadrado.

O teorema de Pitágoras
($a^2 + b^2 = c^2$) lhe dá o
comprimento da hipotenusa
– é 5 zilionésimos.

Figura 3-4: Seu destino final — o nível sub, sub, sub... subatômico.

Depois de ampliar "para sempre", a curva está perfeitamente reta e agora as fórmulas da álgebra e da geometria básica funcionam.

Para o diagrama da esquerda na Figura 3-4, você pode usar agora a fórmula básica da *inclinação* usada na álgebra para encontrar a inclinação no ponto C. É exatamente ¾ – essa é a resposta para a primeira pergunta da Figura 3-2.

Para o diagrama do meio, a fórmula para um triângulo regular usada na geometria lhe dá a área de 6. Então para achar o valor total da área sombreada mostrada na Figura 3-2, você tem que somar esse 6 à área do pequeno retângulo abaixo desse triângulo (o retângulo escuro-sombreado na Figura 3-2 mostra a idéia básica), repita esse processo para todas as outras faixas estreitas, e depois apenas some todas as pequenas áreas.

E para o diagrama da direita, o teorema de Pitágoras regular usado na geometria lhe dá um comprimento de 5. Então para achar o comprimento total da curva entre os pontos A e B na Figura 3-2, você faz a mesma coisa para as outras pequenas seções da curva e depois soma todos os pequenos comprimentos.

Bem, aí está. Cálculo usou o processo do limite para ampliar uma curva até que ela ficasse reta. Depois que está reta, as regras da velha e básica matemática funcionam. Cálculo, dessa forma, dá à álgebra e a geometria básica o poder para lidar com problemas complicados envolvendo quantidades em constante *modificação* (o que nos gráficos aparecem como *curvas*). Isso explica o fato de o cálculo ter tantos usos práticos, pois se existe algo que você com certeza pode contar – além da morte e dos impostos – é que as coisas estão sempre mudando.

Dois Avisos – ou Precisão

Nem tudo nesse capítulo (ou nesse livro por sinal) vai satisfazer os altos padrões dos matemáticos da academia, tão rigorosos e sistemáticos em suas demonstrações.

Eu posso perder minha licença para praticar matemática

Com respeito aos diagramas do meio da Figura 3-2 até 3-4, eu tenho agido como um irresponsável com a matemática. O processo de integração – encontrar a área embaixo de uma curva – não funciona exatamente da maneira que eu expliquei. Não está completamente errado, apenas meio enganoso. Mas – eu não ligo para o que dizem – essa é minha história e eu vou ficar com ela. Na verdade, não é uma maneira ruim de pensar como a integração funciona, e, de qualquer modo, esse é apenas um capítulo de apresentação.

Mas o que "infinito" realmente significa?

O segundo aviso é que toda vez que eu falo sobre infinito – como nas duas últimas seções onde eu discuti ampliação em um número infinito de vezes – eu coloco a palavra "infinito" entre aspas ou digo algo do tipo "você *meio que* amplia para sempre". Toda vez que você fala sobre infinito, você está sempre em terreno duvidoso. O que significaria ampliar para sempre ou um número infinito de vezes? Você não pode fazer isso – você nunca vai chegar lá. Nós podemos imaginar – mais ou menos – o que é ampliar para sempre, mas há algo um pouco estranho sobre essa idéia – e o mesmo com as classificações.

Parte II

Aquecendo-se com os Pré-requisitos do Cálculo

"David está usando álgebra para calcular a gorjeta. Bárbara, você se incomoda de ser um expoente fracionário?"

Nesta parte...

Eu lhe dou uma revisão rápida da álgebra (incluindo frações) e da trigonometria (incluindo geometria) que você precisa para o cálculo. Se você não precisa dessa revisão, pule-a, ou apenas use-a como referência. Se, por outro lado, você está um pouco enferrujado, não seria uma má idéia rever esses assuntos – pelo menos dar uma olhada nessa revisão. Você não pode fazer cálculo sem esses pré-requisitos – especialmente álgebra.

Capítulo 4

Pré-álgebra e Revisão de Álgebra

Neste Capítulo

- Vencendo a batalha das frações: Separando para controlar
- Aumentando os seus poderes
- Chegando a potência das potências
- Estabelecendo as leis dos logaritmos
- Se divertindo com fatoração
- Passeando pela resolução de equações quadráticas

Álgebra é a linguagem do cálculo. Você não pode fazer cálculo sem álgebra, como não pode escrever poesia chinesa sem saber chinês. Então, se sua pré-álgebra ou álgebra está um pouco enferrujada – você sabe, todas aquelas regras para lidar com expressões algébricas, equações, frações, potências, raízes, logaritmos, fatoração, equações de segundo grau, etc. – certifique-se de revisar os conceitos básicos a seguir.

Ajustando as Suas Frações

Abra um livro de cálculo em qualquer página e você vai provavelmente ver uma fração – você não pode escapar delas. Lidar com elas requer que você saiba algumas regras.

Algumas regras rápidas

Primeiramente existe uma regra que é simples, mas muito importante porque sempre aparece no estudo do cálculo:

O denominador de uma fração *nunca* pode ser igual a zero.

$$\frac{0}{5} \text{ é igual a zero, mas } \frac{5}{0} \text{ é indefinido.}$$

É fácil ver que $\frac{5}{0}$ é indefinido quando sabe como a divisão funciona:

$$\frac{8}{2} = 4$$

Isso diz a você, é claro, que 8 é 2 somado quatro vezes; em outras palavras, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Bem, quantos zeros você precisaria somar para chegar a 5? Você não pode fazer isso, e assim você não pode dividir 5 (ou qualquer outro número) por zero.

Aqui está outra regra rápida.

O *recíproco* de um número ou expressão é o seu inverso multiplicativo – o que é uma maneira sofisticada de dizer que o produto de algo pelo seu recíproco é igual a 1. Para achar o recíproco de uma fração, coloque-a invertida. Deste modo, o recíproco de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$, o recíproco de 6, que é igual a $\frac{6}{1}$, é $\frac{1}{6}$, e o recíproco de $x - 2$ é $\frac{1}{x-2}$.

Multiplicando frações

Somar é geralmente mais fácil do que multiplicar, mas com frações, o inverso é verdade – então eu quero lidar com a multiplicação primeiro. Multiplicar frações é como um estalar dos dedos – apenas multiplique as partes de cima e as partes de baixo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ e } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dividindo frações

Dividir frações tem um passo adicional: você inverte a segunda fração e depois multiplica – dessa forma:

$$\frac{3}{10} \div \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40} \quad \text{(agora cancele o 5 do numerador e do denominador)}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Note que você poderia ter cancelado antes de multiplicar. Devido ao fato de o 5 ser somado uma vez para dar 5 e ser somado duas vezes para dar 10, você pode cancelar um 5:[1]

$$\frac{3}{{}_2\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{8}$$

Note também que o problema original poderia ter sido escrito como $\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}}$.

Somando frações

Você sabe que

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Você pode somar desse jeito porque você já tem um denominador comum. Isso também funciona da mesma maneira com variáveis:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Note que não importa que você tenha um 2 no topo da equação, ou um a na parte de baixo da equação; não importa se um 3 está no topo da equação, ou um b está na parte de baixo da equação; e da mesma maneira um 7 ou c. Isso ilustra um princípio poderoso:

As variáveis sempre se comportam exatamente como os números.

Então, se você está se perguntando o que fazer com a variável ou com as variáveis em um problema, pergunte-se como você faria um problema com números ao invés de variáveis. Depois faça o problema da mesma maneira com as variáveis. Isso é ilustrado com o exemplo a seguir:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Você não pode somar essas frações como fez no exemplo anterior porque esse problema não tem um denominador comum. Agora, supondo que você esteja aturdido, faça o problema com número em vez de variáveis. Você se lembra como somar $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$? Eu não vou simplificar cada linha da solução. Você vai ver por que em um minuto.

1. **Encontre o** ***menor denominador comum*** **(na realidade, qualquer denominador comum vai funcionar ao se somar frações), e converta as frações.**

O menor denominador comum é 5 vezes 8, ou 40, então converta cada fração em 40:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{5}$$

$$=\frac{2\cdot 8}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 8}$$ (8 · 5 é igual a 5 · 8 então você pode inverter a ordem. Essas frações são 40, mas eu quero deixar o 5 .8 no denominador por agora)

2. Some os numeradores e mantenha o denominador comum inalterado:

$= \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 8}$ (Você pode ver que isso é igual a $\frac{16 + 15}{40}$, ou $\frac{31}{40}$)

Agora você está pronto para fazer o problema original, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Nesse problema, você tem um ***a*** em vez de um 2, um ***b*** em vez de um 5, um c em vez de um 3, e um ***d*** em vez de um 8. Apenas siga exatamente os mesmos passos que você segue quando está somando $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$. Você pode pensar em cada um dos números da solução acima como estampados em um lado de uma moeda com a variável correspondente do outro lado. Por exemplo, há uma moeda com um 2 de um lado e um ***a*** no lado oposto; outra moeda tem um 8 de um lado e um ***d*** do outro lado, e assim por diante. Agora, faça cada passo da solução anterior, vire cada moeda, e voilà, você tem a solução para o problema original. Aqui está a resposta final:

$$\frac{ad + cb}{bd}$$

Subtraindo frações

Subtrair frações é igual a somar frações com exceção de em vez de somar, você subtrai. Percepções como essa são a razão pela qual eles me pagam muito dinheiro.

Simplificando frações

Terminar problemas de cálculo – depois que você fez todos os passos do cálculo – algumas vezes requer um pouco de matemática complicada, incluindo a simplificação. Certifique-se de que você sabe como simplificar e quando pode fazer isso.

Na fração, $\frac{x^5 y^2}{x^3 z}$, três x podem ser simplificados do numerador e do denominador, resultando na fração simplificada $\frac{x^2 y^2}{z}$. Se você escrever os x em vez de usar os expoentes, você poderá ver mais claramente como isso funciona:

$$\frac{x^5 y^2}{x^3 z} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{x \cdot x \cdot x \cdot z}$$

Agora simplifique os três x do numerador e do denominador:[1]

$$\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot z}$$

Isso deixa você com $\frac{x \cdot x \cdot y \cdot y}{z} = \frac{x^2 y^2}{z}$.

Se expresse

Uma *expressão algébrica* ou simplesmente *expressão* é algo do tipo *xyz* ou $a^2 p^3 \sqrt{q} - 6$, basicamente qualquer coisa sem um sinal de igual (se tiver um sinal de igual, é uma *equação*). Simplificação funciona da mesma maneira para as expressões e paras as variáveis. Por sinal, essa é uma dica não apenas para simplificação, mas para todos os tópicos da álgebra.

As expressões sempre se comportam exatamente como as variáveis.

Assim, se cada *x* no problema acima for substituído por $(xyv - q)$, você tem:

$$\frac{(xyz- q)^5\, y^2}{(xyz - q)^3\, z}$$

E três das expressões $(xyv - q)$ são simplificadas do numerador e do denominador, assim como os três *x* foram simplificados. O resultado simplificado é:

$$\frac{(xyq - q)^2\, y^2}{z}$$

A regra da multiplicação

Agora você sabe *como* simplificar. É igualmente importante saber *quando* você pode simplificar.

Você pode simplificar uma fração somente quando ela tem uma *cadeia de multiplicação contínua* através de todo o numerador e de todo o denominador.

A simplificação é permitida em frações como esta:

$$\frac{a^2\, b^3\, (xy - pq)^4\, (c + d)}{ab^4\, z\, (xy - pq)^3}$$

Pense na multiplicação como algo que conduz eletricidade. Uma corrente elétrica pode passar de uma extremidade do denominador para a outra, do a^2 até o $(c + d)$, porque todas as variáveis e expressões estão conectadas através da multiplicação (Note um sinal de adição e de subtração dentro dos parênteses – o "+" em $(c + d)$ por exemplo – não quebra a cadeia). Devido ao fato de o denominador também ter uma cadeia de multiplicação contínua, você pode simplificar: um *a*, três b_s, e três expressões $(xy + pq)$. Aqui está o resultado:

$$\frac{a(xy - pq)\,(c + d)}{bz}$$

Mas somando um inocente 1 no numerador (ou denominador) na fração original muda tudo:

$$\frac{a^2\, b^3\, (xy - pq)^4\, (c + d) +1}{ab^4\, z\, (xy - pq)^3}$$

O sinal de adição na frente do 1 quebra a corrente elétrica, e não é permito nenhuma simplificação em nenhum lugar da fração.

Valor Absoluto – Absolutamente Fácil

Valor absoluto apenas torna um número negativo em um número positivo e não faz nada a um número positivo ou ao zero. Por exemplo,

$$|-6| = 6, |3| = 3, \text{e } |0| = 0$$

É um pouco complicado quando lidamos com variáveis. Se x é zero ou positivo, então as barras de valor absoluto não fazem nada, e assim,

$$|x| = x$$

Mas se x for negativo, o valor absoluto de x é positivo, e você escreve

$$|x| = -x$$

Por exemplo, se $x = -6$, $|-6| = -(-6) = 6$

Quando x é um número negativo, $-x$ (lê-se como "x negativo" ou "o oposto de x") é um número *positivo*.

Fortalecendo os Seus Poderes

Você é impotente no cálculo se não souber as regras de potência:

- $x^0 = 1$

  Esta é a regra sem levar em consideração a que x é igual – uma fração, um número negativo, qualquer coisa – exceto zero (zero elevado a zero é indefinido). Vamos chamar isso de regra da pia da cozinha:

  $$(\text{tudo menos a pia da cozinha})^0 = 1$$

- $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ e $x^{-a}\ \dfrac{1}{x^a}$

  Por exemplo, $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$. Isso é muito importante! Não se esqueça! Note que a resposta $\dfrac{1}{16}$ *não* é negativa.

- $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$ e $x^{a/b} = (\sqrt[b]{x})^a = \sqrt[b]{x^a}$

  Você pode usar essa regra útil ao inverso para transformar um problema com raiz em um problema de potência mais fácil.

- $x^2 \cdot x^3 = x^5$ e $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

  Aqui você *soma* as potências (A propósito, você não pode fazer nada com x^2 mais x^3. Você não pode somar x^2 a x^3 porque eles não são

*ter*mos iguais. Você só pode somar ou subtrair termos quando a parte da variável de cada termo for a mesma, por exemplo, 3xy2z + 4xy2z = 7xy2z. No caso de você estar curioso, isso funciona da mesma maneira – eu não estou brincando – que 3 cadeiras mais 4 cadeiras é igual a 7 cadeiras; você não pode somar *termos diferentes*, assim como não pode somar 5 cadeiras e 2 carros.

- $\frac{x^5}{x^3} = x^2$ e $\frac{x^2}{x^6} = x^{-4}$ e $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

  Aqui você *subtrai* as potências.

- $(x^2)^3 = x^6$ e $(x^a)^b = x^{ab}$

  Aqui você *multiplica* as potências.

- $(xyz)^3 = x^3\,y^3\,z^3$ e $(xzy)^a = x^a\,y^a\,z^a$

  Aqui você *distribui* a potência para cada variável.

- $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$ *e* $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

  A mesma coisa.

- $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ NÃO!

  Não distribua a potência nesse caso. Em vez disso, multiplique da maneira longa: (x + y)2 = (x + y) (x + y) = x2 + xy + yx + y2 = x2 + 2xy + y2. Veja o que acontece se usar a "regra" acima com números: (3 + 5)2 = 82, ou 64, não 32 + 52, que é igual a 9 + 25, ou 34.

Fixando as Raízes

Raízes, especialmente as quadradas, sempre aparecem em cálculo. Então saber como elas funcionam e entender a conexão fundamental entre raízes e potências é essencial. E, é claro, isso é o que eu já vou te dizer.

Regra das raízes – ou melhor, regra da raiz

Qualquer raiz pode ser transformada em potência, por exemplo, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e $\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$. Dessa forma, você na verdade não precisa das regras das raízes – você pode apenas transformar cada raiz de um problema em uma potência e usar as regras das potências para resolver o problema (essa é uma técnica muito útil, por sinal). Mas caso você seja um guloso por castigo, aqui estão mais regras para revisar (aprender pela primeira vez?). Na realidade, quando você chega aqui, você deve provavelmente saber essas regras.

- $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{1} = 1$

  Mas você sabia disso, certo?

  Você não pode ter um número negativo dentro de uma raiz quadrada ou qualquer outra raiz de número *par* – pelo menos não em cálculo básico.

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, e $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ e $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

  Você multiplica os índices do radical.

- $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$, $\sqrt[4]{a^4} = |\,a\,|$, $\sqrt[6]{a^6} = |\,a\,|$, e assim sucessivamente.

  Se você tem uma raiz de número *par*, você precisa das barras de valor absoluto na resposta, porque sendo ***a*** positivo ou negativo, a resposta é positiva. Se for uma raiz de número *ímpar*, você não precisa das barras de valor absoluto. Assim,

- $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{a^5}$, e assim por diante.

- $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. NÃO!

  Cometa esse erro e vá direito para a cadeia. Tente resolver com números: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, que *não* é igual a 2 + 3.

Simplificando raízes

Aqui estão as duas últimas coisas sobre raízes. Primeiro, você precisa saber os dois métodos para simplificar raízes como $\sqrt{300}$ ou $\sqrt{504}$.

O método rápido funciona para $\sqrt{300}$ porque é fácil perceber o quadrado perfeito, 100, que tem no número 300. Pelo fato de 300 ser igual a 100 vezes 3, o 100 sai como sua raiz quadrada, 10, deixando o 3 dentro do radical. Assim, a resposta é $10\sqrt{3}$.

Para $\sqrt{504}$, não é fácil achar um quadrado perfeito grande que esteja em 504, então você tem que usar o método mais longo:

1. **Quebre o número 504 em um produto de todos os seus números primos.**

$$\sqrt{504} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$$

2. **Circule cada par de números.**

$$\sqrt{(2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3) \cdot 7}$$

3. Para cada par circulado, tire um número para fora da raiz.

$$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$$

4. Simplifique.

$$6\sqrt{14}$$

A última coisa sobre raízes é que, por convenção, você não deixa uma raiz no denominador de uma fração – é uma convenção boba e antiquada, mas ainda é ensinada, então aqui está. Se sua resposta é, vamos dizer, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, você multiplica isso por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Logaritmo – Não é o Nome de uma Escola de Dança

Um *logaritmo* é apenas uma maneira diferente de expressar uma relação exponencial entre números. Por exemplo,

$2^3 = 8$, então,

$\log_2 8 = 3$ (lê-se como "log de 8 na base 2 é igual a 3)

Essas duas equações dizem exatamente a mesma coisa. Você pode pensar em uma delas como a maneira dos gregos escreverem essa relação matemática e a outra como a maneira latina de escrever essa mesma coisa. A base de um logaritmo pode ser qualquer número, exceto o 1, maior do que zero, e por convenção, se a base for 10, você não a escreve. Por exemplo, $\log 1000 = 3$ significa $\log_{10} 1000 = 3$. E também, log de base ***e*** (***e*** ≈ 2,72) é escrito como ***ln*** em vez de $\log_e$ – matemáticos usam tanto isso que eu suponho que eles quiseram uma abreviação especial para isso.

Você deve saber as seguintes propriedades dos logaritmos:

- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^b = b \log_c a$

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- Com essa propriedade, você pode calcular algo do tipo $\log_3 20$ na sua calculadora digitando $\frac{\log_c 20}{\log_c 3}$
- $\log_a a^b = b$
- $a^{\log_a b} = b$

Fatorando – Quando É que Eu Vou Precisar Disso?

Quando é que você vai precisar disso? Para cálculo, é claro.

Fatorar significa "desfazer a multiplicação", como reescrever 12 como $2 \cdot 2 \cdot 3$. No entanto, você não vai encontrar problemas como esse no cálculo. Para cálculo, você precisa saber fatorar expressões algébricas, como fatorar $5xy + 10yz$ em $5y(x + 2z)$. Fatoração algébrica sempre envolve reescrever a *soma* de termos na forma de *produto*. O que se segue é um curso de revisão.

Achando o MDC

O primeiro passo em fatorar qualquer tipo de expressão é encontrar – em outras palavras, fatorar – a maior coisa que todos os termos têm em comum – esse é o *máximo divisor comum* ou MDC. Por exemplo, cada um dos três termos de $8x^3y^4 + 12x^2y^5 + 20x^4y^3z$ tem o fator $4x^2y^3$, então ele pode ser retirado da seguinte forma: $4x^2y^3(2xy + 3y^3 + 5x^2y)$. Certifique-se de sempre procurar um MDC para retirar antes de tentar outras técnicas de fatoração.

Procurando um padrão

Depois de retirar o MDC se houver um, a próxima coisa a se fazer é procurar por um dos três padrões. O primeiro padrão é *importante*; os outros dois são menos importantes.

Diferença dos quadrados

Saber como fatorar a *diferença de quadrados* é crítico:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Se você puder reescrever como que algo do tipo $9x^4 - 25$ se pareça com $(\text{isso})^2 - (\text{aquilo})^2$ então você pode usar o padrão de fatoração. Veja como:

$$9x^4 - 25 = (3x^2)^2 - (5)^2$$

Agora, desde que $(\text{isso})^2 - (\text{aquilo})^2 = (\text{isso} - \text{aquilo})(\text{isso} + \text{aquilo})$, você pode fatorar o problema:

$$(3x^2)^2 - (5)^2 = (3x^2 - 5)(3x^2 + 5)$$

A *diferença* de quadrados, $a^2 - b^2$ pode ser fatorada, mas a *soma* de quadrados, $a^2 + b^2$, *não* pode ser fatorada. Em outras palavras, $a^2 + b^2$, como os números 7 e 13, é *primo* – você não pode quebrá-lo.

Soma e diferença de cubos

Você talvez também queira memorizar as regras de fatoração para a *soma e diferença de cubos*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Tentando algumas fatorações trinomiais

Você se lembra da fatoração regular de trinômios dos seus dias de álgebra?

Um *trinômio* é um polinômio com três termos. Um polinômio é uma expressão do tipo $4x^5 - 6x^3 + x^2 - 5x + 2$ onde, com exceção da *constante* (o número 2 no exemplo), todos os termos têm uma variável elevada a uma potência de número *inteiro* positivo. Em outras palavras, nenhuma potência na forma de frações e com números negativos é permitida. E nem radicais, logaritmos, senos ou cossenos, ou qualquer outra coisa – apenas termos com um *coeficiente*, como o 4 no termo $4x^5$, multiplicado por uma variável elevada a um potência. O *grau* de um polinômio é a maior potência de x do polinômio. O polinômio acima, por exemplo, tem um grau de 5.

Não seria uma má idéia voltar à boa forma com problemas do tipo

$$6x^2 + 13x - 5 = (2x + 5)(3x - 1)$$

Umas poucas técnicas básicas, de adivinhar e verificar, para fatorar um trinômio como esse estão flutuando ao redor do fluido matemático – você provavelmente aprendeu uma delas na sua aula de álgebra. Se você se lembra, ótimo. Mas tais regras de fatoração não são críticas porque você pode sempre fatorar (e resolver) trinômios com a fórmula quadrática, que é abrangida na próxima seção. Para mais sobre fatoração de trinômios, veja *Álgebra I Para Leigos* de Mary Jane Sterling (publicado pela Alta Books).

Resolvendo Equações Quadráticas

Uma equação quadrática é qualquer equação polinomial de *segundo grau* – é quando a maior potência de x, ou de qualquer outra variável usada, é 2.

Você pode resolver equações quadráticas usando um dos três métodos básicos.

Método 1: Fatorando

Resolva $2x^2 - 5x = 12$

1. **Traga todos os termos para um lado da equação, deixando o zero do outro lado.**

   $2x^2 - 5x - 12 = 0$

2. **Fatore.**

   $(2x + 3)(x - 4) = 0$

   Você pode verificar que esses fatores estão corretos ao multiplicá-los. “Soma e Produto” te diz alguma coisa?

3. **Coloque cada fator igual a zero e resolva (usando a propriedade do produto nulo).**

   $2x + 3 = 0 \qquad x - 4 = 0$

   $2x = -3$

   $x = -\frac{3}{2}, \qquad \text{ou} \qquad x = 4$

Então, essa equação tem duas soluções: $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 4$.

Método 2: A fórmula quadrática

A solução ou soluções de uma equação quadrática, $ax^2 + bx + c$, são dadas através da fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Agora resolva a mesma equação do Método 1 com a fórmula quadrática:

1. **Traga todos os termos para um lado da equação, deixando o zero do outro lado.**

   $$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

2. **Coloque os coeficientes na fórmula.**

   $$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-12)}}{2 \cdot 2}$$
   $$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-96)}}{4}$$
   $$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4}$$
   $$= \frac{5 \pm 11}{4}$$
   $$= \frac{16}{4} \text{ ou } \frac{6}{4}$$
   $$= 4 \text{ ou } -\frac{3}{2}$$

Isso concorda com as soluções obtidas previamente – é melhor que as soluções sejam iguais porque nós estamos resolvendo a mesma equação.

Aqui está uma ótima dica para usar a fórmula quadrática para fatorar trinômios.

Digamos que você queira apenas fatorar o trinômio $2x^2 - 5x - 12$ em vez de resolver a equação quadrática correspondente, $2x^2 - 5x - 12 = 0$. Veja aqui o que você deve fazer.

1. **Use a fórmula quadrática para achar os valores de *x* (Você também pode usar sua calculadora para achar as soluções). Certifique-se de que as soluções estão escritas como frações em vez de como decimais e que elas estão reduzidas aos menores valores.**

   As duas soluções, novamente, são 4 e $-\frac{3}{2}$.

2. **Pegue as duas soluções e coloque-as em fatores. Se a solução for positiva, use a subtração. Se a solução for negativa, use adição.**

   Então com a solução igual a 4, você tem $(x - 4)$; e com $-\frac{3}{2}$, você tem $\left(x + \frac{3}{2}\right)$:

   $$(x - 4)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

3. **Se uma das soluções for uma fração, pegue o denominador e coloque-o na frente do *x*.**

   $$(x - 4)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

   E, *voilà*, o trinômio é fatorado em $(x - 4)(2x + 3)$.

Método 3: Completando o quadrado

O terceiro método para resolver equações quadráticas é chamado de *completando o quadrado* porque ele envolve criar um trinômio quadrado perfeito que você pode então resolver tirando a sua raiz quadrada.

Resolva $3x^2 = 24x + 27$

1. **Coloque o x^2 e os termos de x de um lado e a constante do outro.**

   $3x^2 - 24x = 27$

2. **Divida ambos os lados pelo coeficiente de x^2 (a não ser, é claro, que seja 1).**

   $x^2 - 8x = 9$

3. **Pegue metade do coeficiente de x, eleve ao quadrado, e depois some isso em ambos os lados.**

   Metade de –8 é –4 e $(-4)^2$ é 16, então some 16 em ambos os lados:

   $x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$

4. **Fatore o lado esquerdo. Note que o fator sempre contém o mesmo número que você encontrou no passo 3 (-4 nesse exemplo).**

   $(x - 4)^2 = 25$

5. **Tire a raiz quadrada de ambos os lados, lembrando de colocar um sinal de ± do lado direito.**

   $$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{25}$$

   $x - 4 = \pm 5$

6. **Resolva.**

   $x = 4 \pm 5$

   $= 9$ ou -1

Capítulo 5

Funções Legais e Seus Ótimos Gráficos

Neste Capítulo

- Entendendo funções e relações
- Aprendendo sobre linhas
- Focando nas parábolas
- Lutando com os gráficos
- Transformando funções
- Investigando funções inversas

Virtualmente tudo o que você faz em cálculo envolve funções e seus gráficos de uma forma ou de outra. Cálculo diferencial envolve encontrar a inclinação (ou coeficiente angular) de muitas funções, e o cálculo integral envolve calcular a área abaixo das funções. E não somente o conceito de uma função é crítico para o cálculo, ele é uma das idéias mais fundamentais em toda a matemática.

O que é uma Função?

Basicamente, uma função é a relação entre duas coisas na qual o valor numérico de uma coisa em alguma forma depende do valor da outra. Exemplos estão ao nosso redor: A temperatura diária média para a sua cidade depende, e é uma função de, da época do ano; a distância que um objeto caiu é uma função de quanto tempo passou desde que você o soltou; a área de um círculo é uma função do seu raio; e a pressão de um gás engarrafado é uma função da sua temperatura.

As características explicativas de uma função

Uma função tem apenas um valor de saída (output) para um valor de entrada (input).

Considere a Figura 5-1.

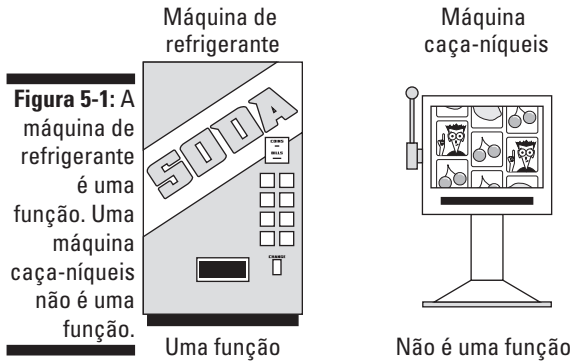



Figura 5-1: A máquina de refrigerante é uma função. Uma máquina caça-níqueis não é uma função.

A máquina de refrigerante é uma função porque depois de inserir os dados de entrada (sua escolha e seu dinheiro), você sabe exatamente qual é o retorno. Com a máquina caça-níqueis, por outro lado, o output é um mistério, então não é uma função.

A função elevada ao quadrado, *f*, é uma função porque tem exatamente um output designado para cada input. Não importa que tanto o 2 como o -2 produzam o mesmo output de 4 porque dado um determinado input, digamos -2, não há mistério sobre o output. Quando o input é 3 em *g*, no entanto, você não sabe se o output vai ser 1 ou 2. Devido ao fato de nenhum mistério sobre o input ser permitido em funções, *g* não é uma função.

Boas funções, ao contrário de boa literatura, têm finais previsíveis.

f: input (domínio)	f: output (imagem)	g: input (domínio)	g: output (imagem)
–2 → 4		3 → 1	
–1 → 1	0	3 → 2	
0 → 0	1	4 → 3	
1 → 1	4	5 → 10	
2 → 4			

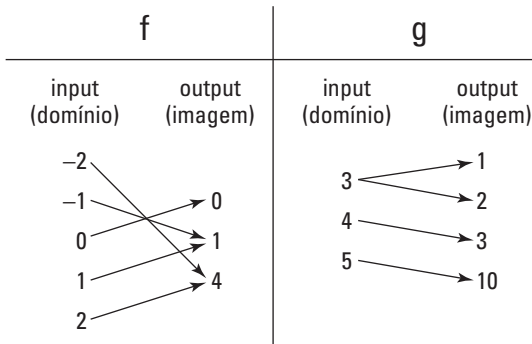
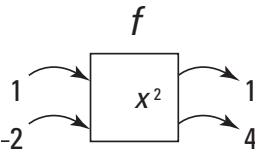



Figura 5-2: *f* é uma função. *g* não é.

O conjunto de todos os inputs é chamado de ***domínio***; o conjunto de todos os outputs é chamado de ***imagem***.

Algumas pessoas gostam de pensar na função como uma máquina. Considere novamente a função ao quadrado, *f*, da Figura 5-2. A Figura 5-3 mostra dois inputs e seus respectivos outputs.

Figura 5-3: Uma função como uma máquina: A carne entra, a lingüiça sai.

Você insere 1 dentro da máquina, e do lado de fora sai um 1; você coloca um - 2 e um 4 sai. Uma função como uma máquina recebe um input, opera de alguma forma, e depois cospe um output.

Variáveis independentes e dependentes

Em uma função, a coisa que *depende* da outra coisa é chamada de *variável dependente*; a outra coisa é a *variável independente*. Visto que você coloca números na variável independente, ela também é chamada de *variável de entrada*. Depois de colocar um número, você então calcula o output ou a resposta para a variável dependente, assim a variável dependente é também chamada de *variável de saída*. Quando você desenha o gráfico de uma função, a variável independente vai para o eixo x, e a variável dependente vai para o eixo y.

Algumas vezes a dependência entre as duas coisas é relação de causa e efeito – por exemplo, aumentar a temperatura do gás *causa* o aumento da pressão. Nesse caso, a temperatura é a *variável independente* e a pressão é a *variável dependente* porque ela depende da temperatura.

Muitas vezes, no entanto, a dependência não é uma relação de causa e efeito, mas somente algum tipo de associação entre duas coisas. Geralmente a variável independente é o que nós já sabemos ou podemos facilmente verificar, e a variável dependente é o que queremos descobrir. Por exemplo, você não diria que o tempo causa um objeto cair (a gravidade é a causa), mas se você sabe quanto tempo se passou, você pode descobrir a altura da queda. Então, o tempo é a variável independente, e a altura a variável dependente; e você diria que a altura é uma função do tempo.

Qualquer que seja o tipo de correspondência entre as duas variáveis, a variável dependente é a coisa com a qual a gente se preocupa – quando e quão rápido ela sobe e quando e quão rápido ela desce. Geralmente, nós queremos saber o que acontece à variável dependente ou y quando a variável independente ou x aumenta (vai para a direita).

Notação das funções

Uma maneira simples de escrever a função $y = 5x^3 - 2x^2 + 3$ é trocar o "*y*" pelo "*f(x)*" e escrever $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3$. É apenas uma notação diferente para a mesma coisa. Essas duas equações são, em todos os aspectos, matematicamente idênticas. Alunos ficam normalmente intrigados pela notação da função quando eles a vêem pela primeira vez. Eles se perguntam o que o "*f*" significa e se o *f(x)* significa *f* vezes *x*. Ele não significa isso. Se a notação da função incomoda você, meu conselho é pensar no *f(x)* como simplesmente a maneira que o *y* é escrito em algum outro idioma. Não considere o *f* e o *x* separadamente; apenas pense no *f(x)* como um símbolo simples para *y*.

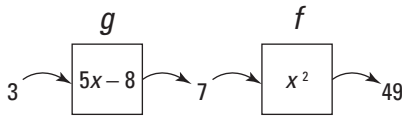
Pense no f(x) (lê-se "*f* de *x*") como uma abreviação para "uma função de *x*". Você pode escrever $y = f(x) = 3x^2$, traduzido como "*y* é uma função de *x* e essa função é $3x^2$". Contudo, algumas vezes outras letras são usadas em vez de *f* – como, por exemplo, *g(x)* ou *p(x)* – geralmente para diferenciar as funções. A letra da função não necessariamente representa alguma coisa, mas às vezes a letra inicial de uma palavra é usada (nesse caso você usa uma letra maiúscula). Por exemplo, você sabe que a área de um quadrado é determinada elevando a medida dos seus lados ao quadrado: *Área* = *lado*^{2} ou $A = s^2$. A área do quadrado depende, e é uma função, da medida do lado. Com a notação da função, você pode escrever $A(s) = s^2$.

Considere a função quadrática $y = x^2$ ou $f(x) = x^2$. Quando você coloca o número 3 no lugar de *x*, você tem como resposta 9. A notação da função é conveniente porque você pode expressar abreviadamente a entrada e a saída escrevendo $f(3) = 9$ (lê-se "*f* de 3 é igual a 9"). Lembre-se que $f(3) = 9$ significa que quando *x* é 3, *f(x)* é 9; equivalentemente, ela diz a você que quando *x* é 3, *y* é 9.

Função composta

Uma função *composta* é a combinação de duas funções. Por exemplo, o custo familiar de energia elétrica depende de quanto você consome, e o consumo depende da temperatura do lado de fora. Posto que o custo depende do consumo e o consumo depende da temperatura, o custo vai depender da temperatura. Na linguagem da função, o custo é uma função do consumo, o consumo é uma função da temperatura, e assim o custo é uma função da temperatura. Essa última função, uma combinação das duas primeiras, é uma função composta.

Deixe $f(x) = x^2$ e $g(3) = 5x - 8$. Coloque 3 em $g(x) = g(3) = 5 \cdot 3 - 8$, que é igual a 7. Agora pegue esse resultado, 7, e coloque em $f(x) = f(7) = 7^2 = 49$. A metáfora da máquina mostra o que eu fiz aqui. Veja a Figura 5-4. A máquina *g* transforma um 3 em um 7, e depois a máquina *f* transforma o 7 em 49.

Figura 5-4: Duas funções como máquinas

Você pode expressar o resultado das duas funções em um passo com a seguinte função *composta*:

$$f\big(g\ (3)\big) = 49$$

Você calcula primeiro a função de dentro de uma função composta – $g(3) = 7$. Depois você pega o resultado, 7, e calcula $f(7)$, que é igual a 49.

Para determinar a função composta geral, $f\big(g\ (x)\big)$, coloque $g(x)$, que é igual a $5x - 8$, em $f(x)$. Em outras palavras, você quer determinar $f\ (5x - 8)$. A função *f* ou máquina *f* pega esse valor e eleva ao quadrado. Assim,

$$f\ (5x - 8) = (5x - 8)^2$$

$$= (5x - 8)\ (5x - 8)$$

$$= 25x^2 - 40x - 40x + 64$$

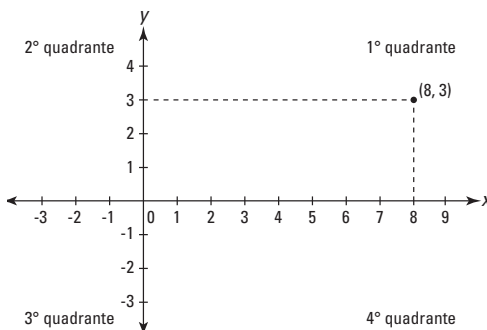
$$= 25x^2 - 80x + 64$$

Assim, $f\big(g\ (x)\big) = 25x^2 - 80x + 64$.

Com funções compostas, a ordem é importante. Como uma regra geral, $f\big(g\ (x)\big) \neq g\big(f\ (x)\big)$.

Com o Que uma Função se Parece?

Eu não sou um histórico matemático, mas todos parecem concordar que René Descartes (1596-1650) veio com a ideia do sistema de coordenadas *x-y* mostrado na Figura 5-5.

Figura 5-5: O plano cartesiano (para Descartes) ou sistema de coordenadas *x-y*.

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) foram os inventores do cálculo, mas é difícil imaginar que eles possam ter feito isso sem a contribuição de Descartes, muitas décadas antes. Pense no sistema de coordenadas (ou a tela da sua calculadora gráfica) como sua janela para o mundo do cálculo. Virtualmente tudo no seu livro de cálculo e nesse livro envolve gráficos de linhas ou curvas – geralmente funções – no sistema de coordenada *x-y*.

Considere os quatro gráficos na figura 5-6.

Essas quatro curvas são funções porque elas satisfazem o ***teste da reta vertical*** (Nota: Eu estou usando aqui o termo ***curva*** para me referir a qualquer forma, seja curva ou reta).

Uma curva é uma função se a reta vertical desenhada – sem levar em consideração onde é desenhada – tocar a curva apenas uma vez. Isso garante que cada input tenha exatamente um output.

Não importa onde você desenhe a reta vertical em qualquer um dos quatro gráficos na Figura 5-6, a reta tocará a curva em apenas um ponto. Tente.

Se, no entanto, uma reta vertical puder ser desenhada para que toque a curva duas ou mais vezes, então a curva não é uma função. As duas curvas na Figura 5-7, por exemplo, não são funções.

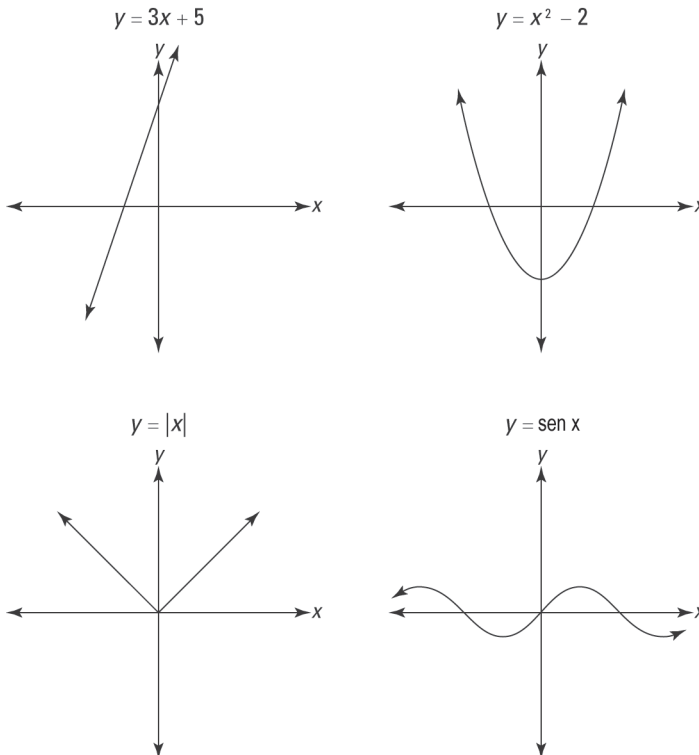



Figura 5-6: Quatro funções.

(Nota: Esses gráficos têm escalas diferentes)

Figura 5-7: Essas duas curvas não são funções porque foram reprovadas no teste da reta vertical. Elas são, no entanto, relações.

Então, as quatro curvas na Figura 5-6 são funções, e as duas na Figura 5-7 não são, mas todas as seis curvas são *relações*.

Uma *relação* é qualquer coleção de pontos no sistema de coordenadas *x-y*.

Você passa pouco tempo estudando algumas relações que não são funções no cálculo – círculos, por exemplo – mas a grande maioria dos problemas de cálculo envolve funções.

Funções Comuns e Seus Gráficos

Você vai ver centenas de funções no seu estudo de cálculo, então não seria uma má idéia familiarizar-se com as funções básicas nesse tópico: a reta, a parábola, a função de valor absoluto, as funções cúbicas e de raiz cúbicas, e as funções exponenciais e logarítmicas.

Retas no plano em português claro

Uma reta é a função mais simples que você pode desenhar num plano cartesiano (Retas são importantes em cálculo porque quando você amplia bem uma curva, ela parece e se comporta como uma reta). A Figura 5-8 mostra um exemplo: $y = 3x + 5$.

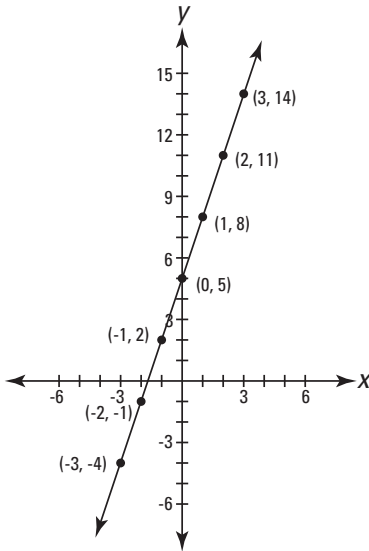



Figura 5-8: O gráfico da reta y = 3x + 5.

Acertando as inclinações

A coisa mais importante sobre a reta na Figura 5-8 – pelo menos para o seu estudo de cálculo – é a sua inclinação. Note que toda vez que *x* se desloca em 1 para a direita, y sobe em *3*. Uma boa maneira de visualizar a inclinação é desenhar uma escada embaixo da reta (veja a Figura 5-9). A parte vertical do degrau é chamada de ***aumento***, a parte horizontal é chamada de ***distância***, e a inclinação é definida como a razão entre o aumento e a distância:

$$inclinação = \frac{aumento}{distância} = \frac{3}{1} = 3$$

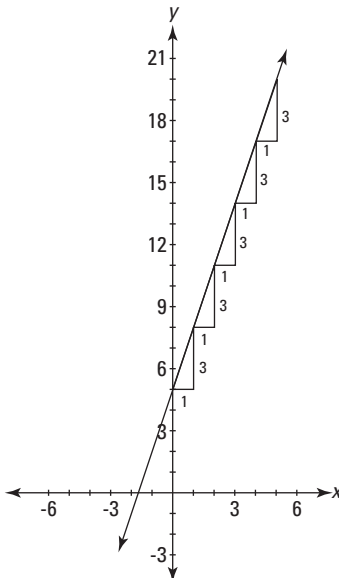



Figura 5-9: A reta y = 3x + 5 tem uma inclinação igual a 3.

Você não precisa fazer a distância ser igual a 1. A razão do aumento sobre a distância, e assim a inclinação, sempre resulta a mesma, não importando qual o tamanho dos degraus. Se você quer fazer a distância igual a 1, no entanto, a inclinação é igual ao aumento porque um número dividido por 1 é igual a ele mesmo. Essa é uma boa maneira de pensar sobre a inclinação - a inclinação é o valor que a reta sobe (ou desce) quando se desloca em 1 para a direita.

Retas que sobem à direita têm uma inclinação *positiva*; retas que descem à direita têm uma inclinação *negativa*. Retas horizontais têm uma inclinação igual à zero, e retas verticais não têm inclinação – você diz que a inclinação de uma reta vertical é *indefinida*.

Aqui está a fórmula para a inclinação:

$$inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Escolha dois pontos na reta da Figura 5-9, digamos (1,8) e (3,14), e coloque-os na fórmula para calcular a inclinação:

$$inclinação = \frac{14 - 8}{3 - 1}$$
$$= \frac{6}{2}$$
$$= 3$$

Esse cálculo envolve, em certo sentido, um degrau da escada que vai até 2 e sobe em 6. A resposta 3 concorda com a inclinação que você pode ver na Figura 5-9.

Qualquer linha paralela a essa tem a mesma inclinação, e qualquer reta perpendicular a essa tem uma inclinação de $-\frac{1}{3}$ que é o *recíproco oposto* de 3.

Retas *paralelas* têm a mesma inclinação. Retas *perpendiculares* têm inclinações recíprocas opostas.

Desenhando linhas

Se você tem a equação da Reta, $y = x + 5$, mas não o seu gráfico, você pode desenhar a reta da maneira antiga ou com a sua calculadora gráfica. A maneira antiga é criar uma tabela de valores substituindo x por números e calculando y. Se você coloca 0 no lugar de x, y vai ser igual a 5; coloque 1 no lugar de x, e y vai ser igual a 8; coloque 2 no lugar de x, e y vai ser 11, e assim sucessivamente. A Tabela 5-1 mostra os resultados.

Tabela 5-1 Pontos na Reta y = 3x + 5

x	0	1	2	3	4	- - - - - - ➤
y	5	8	11	14	17	- - - - - - ➤

Desenhe e conecte os pontos, e coloque setas nas duas extremidades – aí está a sua reta.

Isso é muito fácil com uma calculadora gráfica. Apenas digite $y = 3x + 5$ e sua calculadora irá desenhar o gráfico da reta e produzir uma tabela como a Tabela 5-1.

Equação de uma reta na forma inclinação-interseção (ou forma reduzida) e forma ponto-inclinação

Você pode ver que a reta na Figura 5-9 cruza o eixo *y* no ponto 5 – esse é o ponto onde a reta intercepta o eixo *y*. Visto que tanto a inclinação de 3 como a interseção no eixo *y* de 5 aparecem na equação $y = 3x + 5$, essa equação é dita estar na forma *inclinação-interseção*. Aqui está a forma escrita de maneira geral:

$$y = mx + b$$

(Onde *m* é a inclinação e *b* é o ponto de interseção no eixo *y*)

(Se isso não te faz lembrar de nada – nem mesmo uma lembrança distante – vá diretamente ao departamento de matrícula e abandone o cálculo, mas de maneira alguma devolva esse livro).

Todas as retas, com exceção das retas *verticais*, podem ser escritas dessa forma. Retas verticais sempre se parecem com $x = 6$. O número diz a você onde a reta vertical cruza o eixo *x*.

A equação de uma reta *horizontal* também parece diferente, $y = 10$, por exemplo. Mas ela tecnicamente se encaixa na forma $y = mx + b$ — somente porque a inclinação da reta horizontal é igual à zero, e porque zero multiplicado por *x* é zero, não há um termo *x* na equação.

Uma reta é o tipo mais simples de função, e uma reta horizontal (chamada de função *constante*) é o tipo de reta mais simples. É, todavia, razoavelmente importante em cálculo, então se certifique de saber que a reta horizontal tem uma equação do tipo $y = 10$ e que sua inclinação é igual a zero.

Se $m = 1$ e $b = 0$, você tem a função $y = x$. Essa reta passa pela *origem* (0,0) e faz um ângulo de 45° com ambos os eixos. É chamada de função *identidade* porque os inputs são iguais aos outputs.

Em adição à forma inclinação-intercepto para a equação da reta, você deve saber a forma do *ponto-inclinação*:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para usar essa forma, você precisa saber – você adivinhou – um *ponto* na reta e a *inclinação* da reta. Você pode usar qualquer ponto da reta. Considere novamente a reta na Figura 5-9. Escolha qualquer ponto,

digamos (2,11), depois coloque as coordenadas x e y do ponto em x_1 e y_1, e coloque o coeficiente angular, 3, em m.

$$y - 11 = 3\ (x - 2)$$

Com um pouquinho de álgebra você pode transformar essa equação em uma que nós já conhecemos, $y = 3x + 5$. Tente.

Função de 2° grau e modular – mesmo trabalho

Você deve estar familiarizado com as duas funções mostradas na Figura 5-10: a função de 2º grau, $f\ (x) = x^2$, e a funçãomodular, $g\ (x) = |\ x\ |$.

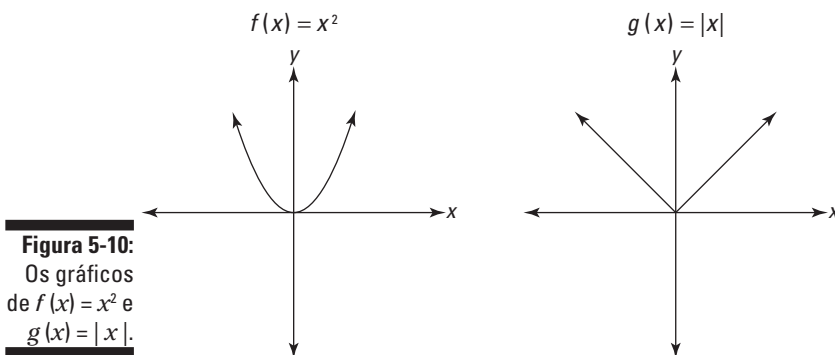



Figura 5-10: Os gráficos de $f\ (x) = x^2$ e $g\ (x) = |\ x\ |$.

Note que ambas as funções são simétricas com respeito ao eixo y. Em outras palavras, os lados direito e esquerdo de cada gráfico são reflexos um do outro. Isso os torna funções ***pares***. Uma função ***polinomial*** do tipo $y = 9x^4 - 4x^2 + 3$, onde todas as potências de x são pares (com ou sem um termo constante), é um tipo de função par. Outro tipo de função par é $y = cos\ (x)$ (veja o Capítulo 6).

Algumas funções esquisitas

Faça o gráfico das funções $f\ (x) = x^3$ e $g\ (x) = \sqrt[3]{x}$ na sua calculadora gráfica. Essas duas funções ilustram uma simetria ímpar. Funções ímpares são simétricas com relação à origem o que significa que se você as girar em 180° sobre a origem, elas vão aterrissar nelas mesmas. Uma função polinomial do tipo $y = 4x^5 - x^3 + 2x$, onde todas as potências de x são ímpares, é um tipo de função ímpar. Outra função ímpar é $y = sen(x)$ (veja o Capítulo 6).

Muitas funções não são nem pares e nem ímpares, por exemplo, $y = 3x^2 - 5x$. Minha professora do ensino médio disse que um parágrafo nunca deveria ter apenas uma sentença, então voilà, agora ele tem duas.

Funções exponenciais

Uma função exponencial é uma com uma potência que contém uma variável, como $f(x) = 2^x$ *ou* $g(x) = 10^x$. A Figura 5-11 mostra os gráficos dessas duas funções no mesmo sistema de coordenadas *x-y*.

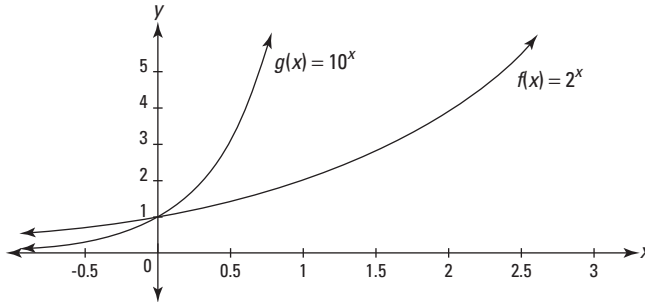



Figura 5-11: Os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 10^x$.

Ambas as funções passam pelo ponto (0,1), assim como todas as funções exponenciais da forma $f(x) = b^x$. Quando *b* é maior do que 1 você tem um ***crescimento exponencial***. Todas as funções desse tipo aumentam para a direita para sempre, e como elas vão para a esquerda no sentido negativo infinitamente, elas avançam ao longo do eixo *x*, sempre chegando perto, mas nunca tocando o eixo. Você usa essas e funções relacionadas para descobrir coisas como investimentos, inflação e aumento populacional.

Quando b está entre 0 e 1, você tem uma função de ***decaimento exponencial***. Os gráficos desse tipo de funções são como funções de crescimento exponencial ao inverso. Funções de decaimento exponencial também cruzam o eixo *y* no ponto (0,1), mas elas sobem para a ***esquerda*** para sempre, e avançam ao longo do eixo *x* para a ***direita***. Essas funções exemplificam coisas que encolhem ao longo do tempo, como o decaimento radiativo do urânio.

Funções logarítmicas

Uma função logarítmica é simplesmente uma função exponencial com o eixo *x* e *y* trocado. Em outras palavras, a direção para cima e para baixo em um gráfico exponencial corresponde à direção direita e esquerda em um gráfico logarítmico, e a direção direita e esquerda em um gráfico exponencial corresponde à direção para cima e para baixo em um gráfico logarítmico (Se você quiser uma revisão sobre logs, veja o Capítulo 4). Você pode ver essa relação na Figura 5-12, na qual ambas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ são desenhadas no mesmo conjunto de eixos.

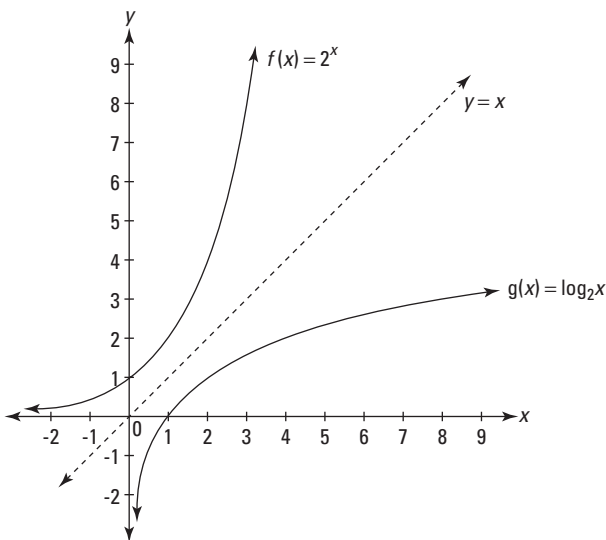



Figura 5-12: Os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Tanto a função exponencial como a função logarítmica são monotônicas. Uma função monotônica pode subir sobre todo o seu domínio (chamada de função *crescente*) ou descer sobre todo o seu domínio (uma função *decrescente*).

Note a simetria das duas funções na Figura 5-12 sobre a linha $y = x$. Isso as torna *inversas* uma da outra, o que nos leva para o próximo tópico.

Funções Inversas

As funções $f(x) = x^2$ (para x ≥ 0) e a função $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (lê-se como "*f* inversa de *x é igual a raiz de x*") são funções inversas porque cada uma desfaz o que a outra fez. Em outras palavras, $f(x) = x^2$ recebe uma entrada de 3 e produz uma saída de 9 (porque $3^2 = 9$); $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ recebe uma entrada de 9 e torna isso de volta ao número 3 (porque $\sqrt{9} = 3$). Note que $f(3) = 9$ e $f^{-1}(9) = 3$. Você pode escrever tudo isso em um passo como $f^{-1}\left(f(3)\right) = 3$. Funciona da mesma maneira se você começar com $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(16) = 4$ (porque $\sqrt{16} = 4$), e f (4) = 16 (porque $4^2 = 16$). Se você escreve esse único passo, você tem $f\left(f^{-1}(16)\right) = 16$ (Note que lemos $f^{-1}(x)$ como "*f* inversa de *x*", não temos o inverso de *x*, mas as funções são inversas uma da outra).

A maneira sofisticada de somar tudo isso é dizer que $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são funções inversas se, e somente se, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ e $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

Não confunda o sobrescrito –1 em $f^{-1}(x)$. com o expoente –1. O expoente –1 lhe dá o recíproco de algo, por exemplo, $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Mas $f^{-1}(x)$ é o inverso de $f(x)$. *Não* é igual a $\frac{1}{f(x)}$ que é o recíproco de $f(x)$. É claro que você talvez pergunte: então por que o mesmo símbolo é usado para duas coisas diferentes? Não faço a menor idéia.

Quando você desenha o gráfico de funções inversas, cada uma é o reflexo da outra, refletida sobre a linha $y = x$. Veja a Figura 5-13, que tem os gráficos das funções inversas $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

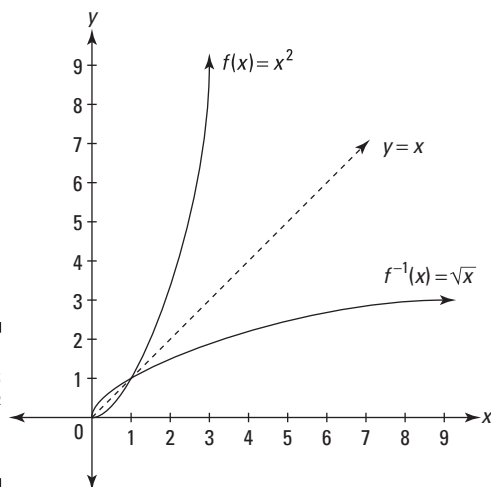
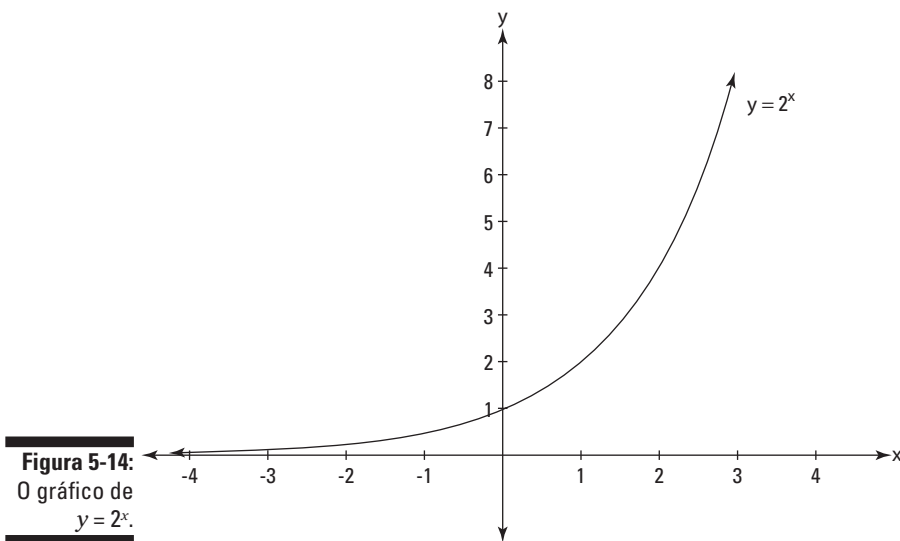



Figura 5-13: Os gráficos de $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Se você rotacionar o gráfico na Figura 5-13 no sentido anti-horário para que a linha $y = x$ fique vertical, você pode ver facilmente que $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são reflexos uma da outra. Uma conseqüência dessa simetria é que se um ponto como (2,4) estiver em uma das funções, o ponto (4,2) vai estar na outra. E também, o domínio de f é o contradomínio de f^{-1} e o contradomínio de f é o domínio de f^{-1}.

Deslocamentos, Reflexos, Esticamentos e Reduções

Qualquer função pode ser transformada em uma função correspondente, deslocando-a horizontalmente ou verticalmente, virando (refletindo) horizontalmente ou verticalmente, ou esticando ou reduzindo horizontalmente ou verticalmente. Eu faço os deslocamentos horizontais primeiro. Considere a função exponencial $y = 2^x$. Veja a Figura 5-14.

Figura 5-14: O gráfico de $y = 2^x$.

Transformações horizontais

Transformações horizontais são feitas somando um número ou diminuindo um número da variável de entrada x ou multiplicando x por qualquer número. Todas as transformações horizontais, exceto o reflexo, funcionam da maneira ***oposta*** que você espera: Somando um valor a x faz a função se deslocar para a esquerda, subtraindo um valor de x faz a função se deslocar para a direita, multiplicando x por um número maior do que 1 reduz a função, e multiplicando x por um número menor do que 1 estica a função. Por exemplo, o gráfico de $y = 2^{x+3}$ tem a mesma forma e orientação do que o gráfico da Figura 5-14; é apenas deslocado em três unidades para a esquerda. Em vez de passar pelos pontos (0,1) e (1,2), a função deslocada passa por (–3,1) e (–2,2). E o gráfico de $y = 2^{x-3}$ está a três unidades à direita de $y = 2^x$. A função original e as transformações são mostradas na Figura 5-15.

Se você multiplicar o x em $y = 2^x$ por 2, a função reduz horizontalmente por um fator de 2. Então todo ponto na nova função é metade da sua distância original do eixo y. A coordenada y de cada ponto continua a mesma; a coordenada x é cortada pela metade. Por exemplo, $y = 2^x$ passa por (1,2), então $y = 2^{2x}$ passa por $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $y = 2^x$ passa por $\left(-4, \frac{1}{16}\right)$, então $y = 2^{2x}$ passa por $\left(-2, \frac{1}{16}\right)$. Multiplicando x por um número menor do que 1 tem um efeito oposto. Quando $y = 2^x$ é transformado em $y = 2^{\frac{1}{4}x}$, cada ponto em $y = 2^x$ é afastado do eixo y por uma distância 4 vezes maior do que era. Para visualizar o gráfico de $y = 2^{\frac{1}{4}x}$, imagine que você tem o gráfico de $y = 2^x$ em um sistema de coordenadas elástico. Agarre o sistema de coordenadas na esquerda e na direita e estique por um fator de 4, afastando tudo do eixo y, mas mantendo o eixo y no centro. Agora você tem o gráfico de $y = 2^{\frac{1}{4}x}$.

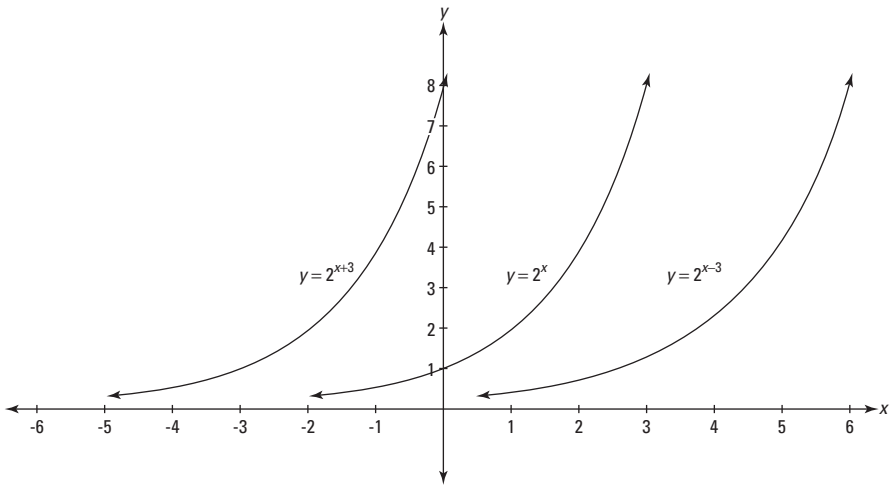
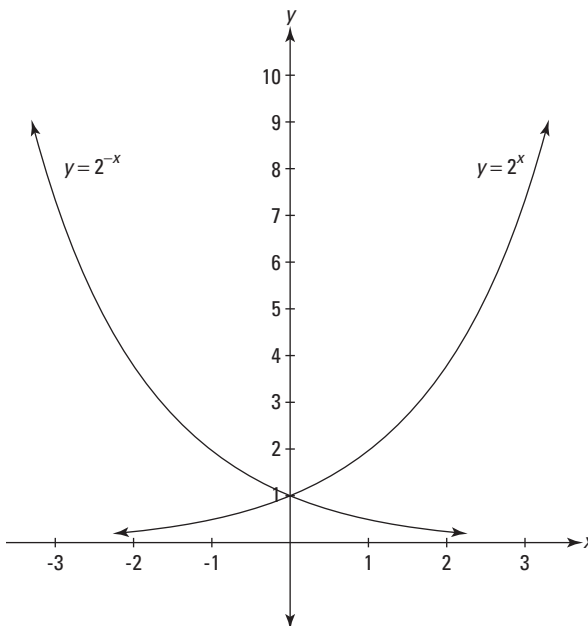
Figura 5-15: Os gráficos de $y = 2^x$, $y = 2^{x+3}$, $y = 2^{2x+3}$.

O último deslocamento horizontal é um reflexo sobre o eixo *y*. Multiplicando o *x* em $y = 2^x$ por −1 vai refletir ou virar em torno do eixo *y*. Por exemplo, o ponto (1,2) se torna (−1,2) e $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, se torna $\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Veja a Figura 5-16.

Figura 5-16: Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

Transformações verticais

Para transformar uma função verticalmente, você soma um número ou subtrai um número de toda a função ou multiplica por um número. Para fazer algo para uma função toda, digamos $y = 10^x$, imagine que todo o lado direito da equação está dentro dos parênteses, como $y = (10^x)$. Agora, todas as transformações verticais são feitas colocando um número em algum lugar à direita da equação do ***lado de fora*** dos parênteses (Obviamente, você realmente não precisa dos parênteses). Ao contrário das transformações horizontais, as transformações verticais funcionam da maneira que você espera: Somar faz a função ir para cima, subtrair faz a função ir para baixo, multiplicar por um número maior do que 1 expande a função, e multiplicar por um número menor do que 1 encolhe a função. Por exemplo,

$y = 10^x + 6$ desloca a função original em 6 unidades para cima

$y = 10^x - 2$ desloca a função original em 2 unidades para baixo

$y = 5 \cdot 10^x$ expande a função original verticalmente por um fator igual à 5

$y = \frac{1}{3} \cdot 10^x$ reduz a função original horizontalmente por um fator igual à 3.

Ao multiplicar a função por -1, ela vai refletir sobre o eixo x, ou, em outras palavras, virar de cabeça para baixo.

Capítulo 6

A Dança da Trigonometria

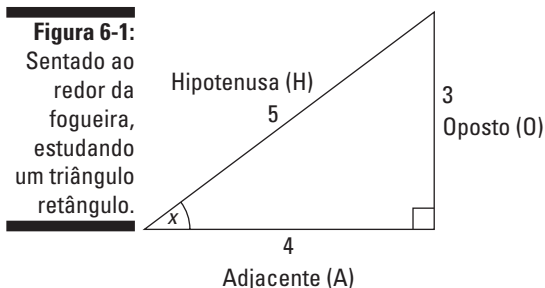
Neste Capítulo

- Arremessando para eles com SohCahToa
- Todo mundo tem um ângulo: 30°, 45°, 60º
- Circunavegando um círculo unitário
- Fazendo o gráfico de funções trigonométricas
- Investigando funções trigonométricas inversas

Muitos problemas de cálculo envolvem trigonometria, e o cálculo por si só é um desafio suficiente se tivermos que reaprender a trigonometria ao mesmo tempo. Então, se sua trigonometria estiver enferrujada – eu estou chocado – revise essas noções básicas, ou faça outra coisa.

Estudando Trigonometria no Acampamento SohCahToa

O estudo da trigonometria começa com o triângulo retângulo. As três funções mais importantes da trigonometria (seno, cosseno e tangente) e seus recíprocos (co-secante, secante e co-tangente) dizem a você algo sobre as medidas dos lados de um triângulo que contém um ângulo agudo dado – como o ângulo x na Figura 6-1. O maior lado desse triângulo retângulo (ou de qualquer triângulo retângulo), o lado diagonal, é chamado de ***hipotenusa***. O lado que mede 3 unidades é chamado de lado ***oposto*** porque está no lado oposto ao ângulo x, e a medida do lado é 4 e é chamado de lado ***adjacente*** porque é adjacente a, ou tocando, o ângulo x.

Figura 6-1: Sentado ao redor da fogueira, estudando um triângulo retângulo.

SohCahToa é um mnemônico sem sentido que ajuda você a se lembrar as definições das funções seno, cosseno, e tangente. *SohCahToa* usa as letras iniciais de ***seno***, ***cosseno***, e ***tangente***, e as letras iniciais de ***hipotenusa***, ***oposto***, e ***adjacente*** para ajudar você a se lembrar das definições a seguir (Para lembrar como se soletra *SohCahToa*, note a sua pronuncia e o fato de que contém três grupos de letras em cada sílaba).

Soh $\text{sen }\theta = \frac{\mathbf{O}}{\mathbf{H}}$

Cah $\cos\theta = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{H}}$

Toa $\text{tg }\theta = \frac{\mathbf{O}}{\mathbf{A}}$

Para o triângulo na Figura 6-1,

$$\text{sen } x = \frac{O}{H} = \frac{3}{5} \qquad \cos x = \frac{A}{H} = \frac{4}{5} \qquad \text{tg } x = \frac{O}{A} = \frac{3}{4}$$

As outras três funções são recíprocas dessas: co-secante (csc) é o recíproco do seno, secante (sec) é o recíproco do cosseno, e a co-tangente (cot) é o recíproco da tangente.

$$\text{cosec }\theta = \frac{1}{\text{sen }\theta} = \frac{1}{\frac{O}{H}} = \frac{H}{O}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{A}{H}} = \frac{H}{A}$$

$$\text{cotg }\theta = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{1}{\frac{O}{A}} = \frac{A}{O}$$

Então para o triângulo na Figura 6-1,

$$\text{cosec } x = \frac{H}{O} = \frac{5}{3} \qquad \sec x = \frac{H}{A} = \frac{5}{4} \qquad \text{cotg } x = \frac{A}{O} = \frac{4}{3}$$

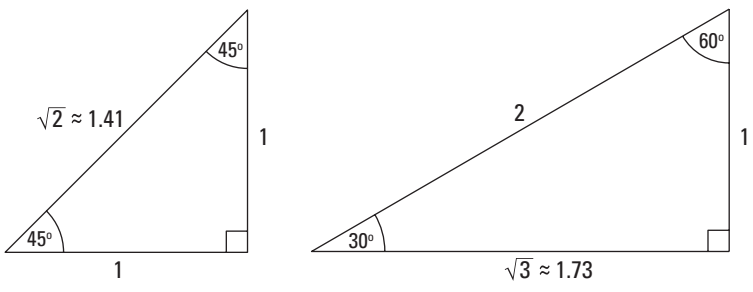
Dois Triângulos Retângulos Especiais

Visto que muitos problemas básicos de cálculo envolvem ângulos de 30°, 45°, e 60°, é uma boa ideia decorar os dois triângulos retângulos na Figura 6-2.

O triângulo 45°-45°-90°

Todo 45°-45°-90° tem a forma de um quadrado cortado pela metade na sua diagonal. O triângulo 45°-45°-90° na Figura 6-2 é metade de um quadrado de lados 1 por 1. O teorema de Pitágoras lhe dá a medida da hipotenusa, $\sqrt{2}$, ou mais ou menos 1,41.

O *teorema de Pitágoras* diz a você que para qualquer triângulo retângulo, $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são as medidas das *pernas* do triângulo (os lados que tocam o ângulo reto) e c é a medida da *hipotenusa*.

Figura 6-2: O triângulo 45°-45°-90° e o triângulo 30°-60°90°.

Quando você aplica as funções trigonométricas *SohCahToa* e seus recíprocos ao triângulo 45°-45°-90°, você tem os seguintes valores trigonométricos:

$$\text{sen } 45^o = \frac{H}{O} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71 \qquad \text{cosec } 45^o = \frac{H}{O} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\cos 45^o = \frac{A}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71 \qquad \sec 45^o = \frac{H}{A} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\text{tg } 45^o = \frac{O}{A} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{cotg } 45^o = \frac{A}{O} = \frac{1}{1} = 1$$

O triângulo 30°-60°-90°

Todo triângulo 30°-60°-90° é metade de um triângulo eqüilátero.

O triângulo 30°-60°-90° na Figura 6-2 é metade de um triângulo eqüilátero de 2-por-2-por-2. Ele tem pernas que medem 1 e $\sqrt{3}$ (mais ou menos 1,73), e uma hipotenusa de medida igual a 2.

Não cometa o erro comum de trocar o 2 pela $\sqrt{3}$ em um triângulo 30°-60°-90°. Lembre-se que o 2 é maior que $\sqrt{3}$ ($\sqrt{4}$ é igual a 2, então $\sqrt{3}$ deve se menor do que 2) e que a hipotenusa é sempre o maior lado de um triângulo retângulo.

Quando você amplia um triângulo 30°-60°-90°, exagere o fato de que é mais largo do que alto. Isso torna óbvio que o menor lado (de medida igual a 1) é oposto ao menor ângulo (30°).

Aqui estão os valores trigonométricos para o triângulo 30°-60°-90°.

$$\text{sen } 30^o = \frac{H}{O} = \frac{1}{2} \qquad \text{cosec } 30^o = \frac{H}{O} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30^o = \frac{A}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \qquad \sec 30^o = \frac{H}{A} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$$

$$\text{tg } 30^o = \frac{O}{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \qquad \text{cotg } 30^o = \frac{A}{O} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

O triângulo 30°-60°-90° mata dois coelhos com uma cajadada só porque ele também lhe dá os valores trigonométricos para um ângulo de 60°. Dê novamente uma olhada na Figura 6-2. Para o ângulo de 60°, o lado do triângulo que mede $\sqrt{3}$ é agora o lado *oposto* para os fins do *SohCahToa* porque está no lado oposto do ângulo de 60°. O lado de medida igual a 1 se torna o lado *adjacente* para o ângulo de 60°, e o lado de medida igual a 2 continua, é claro, sendo a hipotenusa. Agora use o *SohCahToa* de novo para achar os valores trigonométricos do ângulo de 60°.

$$\text{sen } 60^o = \frac{O}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \qquad \text{cosec } 60^o = \frac{H}{O} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$$

$$\cos 60^o = \frac{A}{H} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^o = \frac{H}{A} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{tg } 60^o = \frac{O}{A} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \qquad \text{cotg } 60^o = \frac{A}{O} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$$

O mnemônico *SohCahToa*, junto com os dois triângulos retângulos muito fáceis de serem lembrados na Figura 6-2, te dão a resposta para 18 problemas trigonométricos!

Circulando o Inimigo com o Círculo Unitário

SohCahToa somente funciona com triângulos retângulos, e assim só pode lidar com ângulos *agudos* – ângulos menores que 90° (Os ângulos em um triângulo devem somar 180° porque um triângulo retângulo tem um ângulo de 90°, e os outros dois ângulos devem ser menores do que 90°). Com o ***círculo trigonométrico (unitário)***, no entanto, você pode achar valores trigonométricos para qualquer tamanho de ângulo. O *círculo trigonométrico* tem um raio de *uma unidade* e é fixado em um sistema de coordenadas *x-y* com o seu centro na origem. Veja a Figura 6-3.

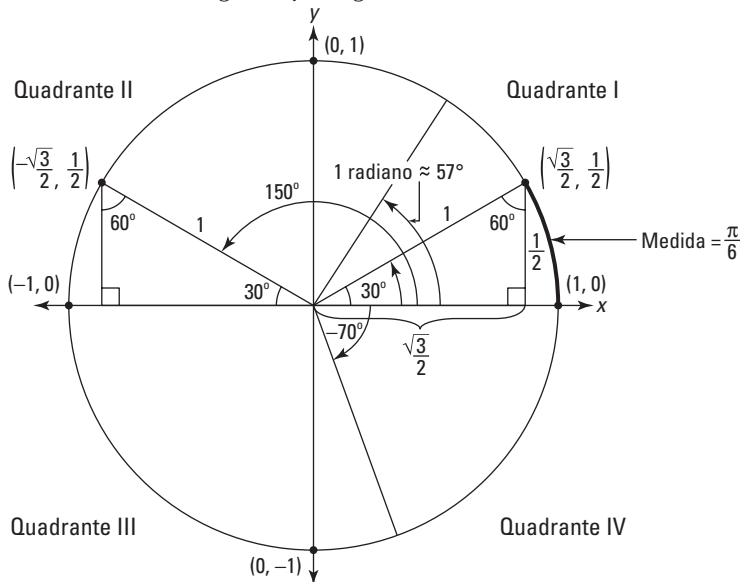



Figura 6-3: O tão falado círculo trigonométrico.

A Figura 6-3 tem bastante informação, mas não entre em pânico; tudo vai fazer sentido em um minuto.

Ângulos no círculo trigonométrico

Para medir um ângulo no círculo trigonométrico, comece no lado positivo do eixo x e siga em sentido anti-horário para o lado *terminal* do ângulo.

Por exemplo, o ângulo de 150° na Figura 6-3 começa no lado positivo do eixo x e termina no segmento que toca o círculo unitário no ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se, em vez disso, você seguir no sentido horário, você pode obter um ângulo com medida *negativa*.

Medindo ângulos com radianos

Você sabe tudo sobre ***graus***. Você sabe como são ângulos de 45° e de 90°; você sabe que ***meia volta*** significa uma volta de 180° e que voltando até onde você começou é uma volta de 360°.

Mas graus não é a única maneira de medir ângulos. Você também pode usar *radianos*. Graus e radianos são apenas duas maneiras diferentes de medir ângulos, como polegadas e centímetros são duas maneiras de medir o comprimento.

A medida em *radiano* de um ângulo é o comprimento do arco ao longo da circunferência do círculo unitário cortado pelo ângulo.

Olhe para o ângulo de 30° no quadrante I na Figura 6-3. Você vê a seção em negrito da circunferência do círculo que é cortada por esse ângulo? Visto que o círculo todo tem 360°, o ângulo de 30° é um doze avos do círculo. Então o comprimento do arco em negrito é um doze avos da circunferência do círculo. A circunferência é dada pela fórmula $C = 2\pi r$. Esse círculo tem um raio igual a 1, então sua circunferência é igual a 2π. Posto que o arco em negrito seja um doze avos disso, seu comprimento é $\frac{\pi}{6}$, que é a medida em radiano do ângulo de 30°.

A circunferência do círculo trigonométrico de 2π torna mais fácil se lembrar que 360° é igual a 2π radianos. Metade da circunferência tem uma medida igual a π, então 180° é igual a π radianos.

Se você focar no fato de que 180° é igual a π radianos, outros ângulos serão fáceis:

- 90° é metade de 180°, então 90° é igual a metade de π, ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.
- 60° é um terço de 180°, então 60° é igual a um terço de π, ou $\frac{\pi}{3}$ radianos.
- 45° é um quarto de 180°, então 45° é igual a um quarto de π, ou $\frac{\pi}{4}$ radianos.
- 30° é um sexto de 180°, então 30° é igual a um sexto de π, ou $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Aqui estão as fórmulas para converter de graus para radianos e vice versa.

- Para transformar de graus para radianos, multiplique a medida do ângulo por $\frac{\pi}{180°}$.
- Para transformar de radianos para graus, multiplique a medida do ângulo por $\frac{180°}{\pi}$

Por sinal, a palavra *radiano* vem de *raio*. Olhe a Figura 6-3 novamente. Um ângulo medindo 1 radiano (mais ou menos 57°) corta um arco ao longo da circunferência desse círculo de mesma medida do raio do círculo. Isso é verdade não apenas para círculos unitários, mas para círculos de qualquer tamanho. Em outras palavras, pegue o raio de qualquer círculo, coloque-o ao longo da circunferência do círculo, e esse arco cria um ângulo de 1 radiano.

Nesse ou em qualquer outro livro de cálculo, algumas problemas usam graus e outros usam radianos, mas radianos é a unidade preferível. Se um problema não especificar a unidade, faça o problema em radianos.

Querida, eu encolhi a hipotenusa

Olhe novamente o círculo unitário na Figura 6-3. Viu o triângulo de 30°-60° - 90° no quadrante I? É a mesma figura, porém metade do tamanho do triângulo da Figura 6-2. Cada um dos seus lados é igual à metade do da Figura 6-2. Visto que a hipotenusa tem agora uma medida de 1, e porque quando H é 1, $\frac{O}{H}$ é igual a O, o seno do ângulo de 30°, que é igual a $\frac{O}{H}$, termina se igualando à medida do lado oposto. O lado oposto é igual a $\frac{1}{2}$, então isso é o seno de 30°. Note que a medida do lado oposto é a mesma que a coordenada *y* do ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se você descobre o cosseno de 30° nesse triângulo, ele acaba se igualando à medida do lado adjacente, que é o mesmo que a coordenada *x* do ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Note que esses valores para o sen 30° e cos 30° são os mesmos que os dados pelo triângulo de 30°- 60° - 90° na Figura 6-2. Isso mostra a você, a propósito, que encolhendo um triângulo retângulo (ou aumentando) não tem efeito nos valores trigonométricos para os ângulos no triângulo.

Agora olhe para o triângulo de 30°- 60° - 90° no quadrante II na Figura 6-3. Visto que é do mesmo tamanho que o triângulo de 30°- 60° - 90° no quadrante I, que toca o círculo no ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o triângulo no quadrante II toca o círculo no ponto que está do outro lado e é simétrico ao ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. As coordenadas do ponto no quadrante II são $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Mas lembre-se que os ângulos no círculo unitário são todos medidos a partir do eixo *x*, assim a hipotenusa desse triângulo indica um ângulo de 150°; e esse é o ângulo, e não 30°, associado com o ponto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. O cosseno de 150° é dado pela coordenada *x* desse ponto, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, e o seno de 150° é igual a coordenada *y*, $\frac{1}{2}$.

O lado terminal de um ângulo no círculo unitário toca o círculo em um ponto cuja coordenada *x* é o cosseno do ângulo e cuja coordenada *y* é o seno do ângulo. Aqui está um mnemônico: *x* e *y* estão em ordem alfabética assim como estão o *cosseno* e o *seno*.

Colocando tudo junto

Olhe a Figura 6-4. Agora que você sabe tudo sobre o triângulo de 45°- 45° - 90°, você pode facilmente resolver – ou acreditar no que eu digo – que um triângulo de 45°- 45°- 90° no quadrante I toca o círculo unitário no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. E se você vira o triângulo de 30°-60°-90° no quadrante I, você tem um ângulo de 60° que toca o círculo no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Esse ponto tem as mesmas coordenadas que as do ângulo de 30°, mas invertidas.

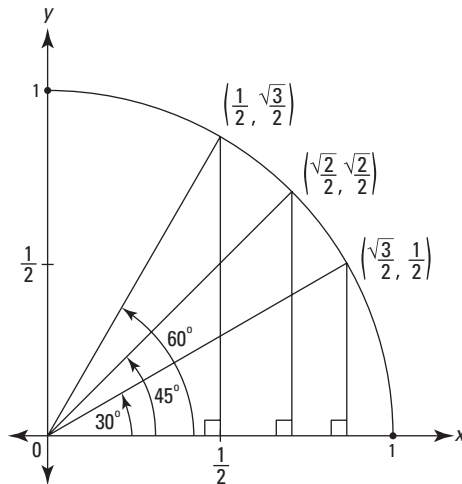



Figura 6-4: Quadrante I do círculo trigonométrico com três ângulos e suas coordenadas.

Toda vez que você desenhar um triângulo retângulo no círculo unitário, coloque o ângulo agudo, que será o *imput* das funções trigonométricas, na origem – ou seja, (0,0) – e depois coloque o ângulo reto no eixo x – nunca no eixo y.

Para evitar misturar os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ao lidar com um ângulo de 30° ou com um ângulo de 60°, note que $\frac{1}{2}$ é igual a 0,5 e que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é igual a mais ou menos 0,87. Então, devido ao fato de um ângulo de 30° tocar o círculo mais para a direita do que para cima, a coordenada x dever ser maior que a coordenada y. Assim, o ponto deve ser $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, e não o contrário.

Agora para todo o processo. Por causa da simetria nos quatro quadrantes, os três pontos no quadrante I na Figura 6-4 têm equivalentes nos outros três quadrantes, dando a você 12 pontos conhecidos. Some a esses os quatro pontos nos eixos, (1,0), (0,1), (-1,0), e (0,-1), e você tem um total de 16 pontos, cada um com um ângulo correspondente, como mostrado na Figura 6-5.

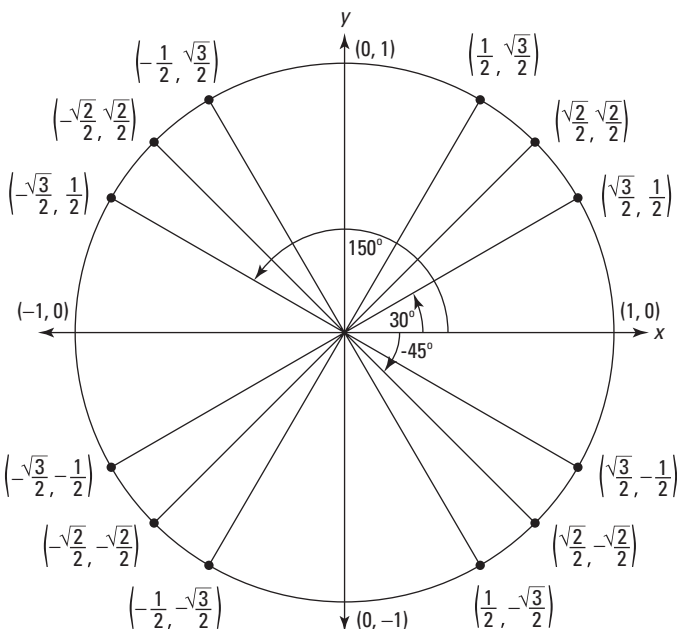



Figura 6-5: O círculo unitário com 16 ângulos e suas coordenadas.

Esses 16 pares de coordenadas te dão automaticamente o cosseno e o seno dos 16 ângulos. E devido ao fato de tg $= \frac{\text{sen}}{\text{cos}}$, você pode obter a tangente desses 16 ângulos dividindo a coordenada y do ângulo pela coordenada x do mesmo (Note que a tg também é igual à inclinação

do lado terminal do ângulo). Finalmente, você pode encontrar a co-secante, secante, e co-tangente dos 16 ângulos porque essas funções trigonométricas são apenas os recíprocos do seno, cosseno, e tangente. Agora você tem, na ponta dos seus dedos – ok, talvez eu esteja exagerando – a resposta para 96 questões trigonométricas.

Saber os valores trigonométricos para o círculo unitário é muito importante em cálculo. Então faça um teste com você mesmo. Comece memorizando os triângulos de 45°- 45°- 90° e de 30°- 60°- 90°. Depois imagine como esses triângulos cabem dentro dos quatro quadrantes do círculo unitário. Use a simetria dos quadrantes como ajuda. Com alguma prática, você pode produzir os valores pra as seis funções trigonométricas dos 16 ângulos na sua cabeça. Tente fazer isso com radianos e também com graus. Isso vai aumentar o seu total para 192 fatos trigonométricos! Rápido – qual é a secante de 210°, e qual é o cosseno de $\frac{2\pi}{3}$? Aqui estão as respostas (não pode olhar): $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{1}{2}$.

Desenhando o Gráfico do Seno, Cosseno e da Tangente

A Figura 6-6 mostra os gráficos do seno, cosseno e da tangente, os quais você pode, naturalmente, produzir em uma calculadora gráfica.

O seno, cosseno e a tangente – e seus recíprocos, co-secante, secante e co-tangente – são funções *periódicas*, o que significa que seus gráficos contêm uma forma básica que se repete indefinidamente para a esquerda e para a direita. O *período* desse tipo de função é o comprimento de um de seus ciclos.

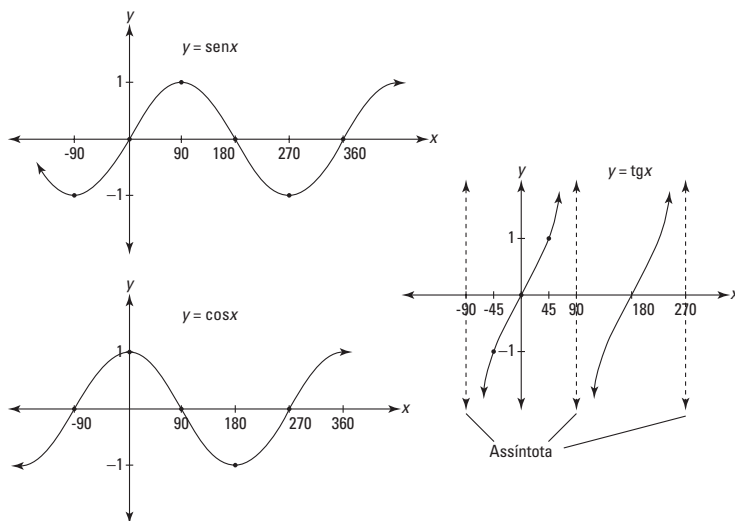



Figura 6-6: Os gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Se você conhece o círculo unitário, você pode facilmente reproduzir esses três gráficos manualmente. Primeiro, note que os gráficos do seno e do cosseno têm a mesma forma – cosseno é o mesmo que seno, apenas deslize em 90° para a esquerda. Também, note que sua forma de onda simples vai até 1 e até -1 e segue para esquerda e para direita eternamente, se repetindo a cada 360°. Esse é o ***período*** de ambas as funções, 360° (Não é coincidência, por sinal, que 360° é também uma volta ao redor do círculo). O círculo unitário diz a você que sen $0^o = 0$, sen $90^o = 1$, sen $180^o = 0$, sen $270^o = -1$, e que o sen $360^o = 0$. Se você começa com esses cinco pontos, você pode esboçar um círculo. O ciclo então se repete para a esquerda e para a direita. Você pode usar o círculo unitário da mesma maneira para esboçar a função cosseno.

Note na Figura 6-6 que o período da função tangente é 180°. Se você se lembrar disso e do padrão básico de repetir o formato em S para trás, esboçar não é tão difícil. Devido ao fato de a tg $= \frac{x}{y}$, você pode usar o círculo unitário para determinar que a tg $(-45^o) = -1$, tg 0^o=0 e tg $45^o = 1$. Isso dá a você os pontos (-45°,-1), (0,0), e (45°,1). Visto que a tg (-90^o) e a tg 90^o são indefinidas ($\frac{x}{y}$ nesses pontos te dão um zero no denominador), você desenha ***assíntotas*** em -90° e 90°.

Uma ***assíntota*** é uma linha imaginária com a qual a curva vai se aproximando cada vez mais, mas nunca toca.

As duas assíntotas em -90° e em 90° e os três pontos em (-45°,-1), (0,0), e (45°,1) mostram a você onde esboçar um S para trás. Os formatos em S se repetem a cada 180° para a esquerda e para a direita.

Funções Trigonométricas Inversas

Uma função trigonométrica inversa, assim como qualquer função inversa, inverte o que a função original faz. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ = sen 30^o, então a função inversa do seno – escrita como sen^{-1} – inverte a entrada e a saída. Assim, $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2} = 30^o$. Isso funciona da mesma maneira para as funções trigonométricas.

O número 1 negativo sobrescrito na função inversa do seno ***não*** é uma potência negativa, apesar de o fato de se parecer com isso. Elevar algo a potência -1 lhe dá o recíproco, então você talvez pense que $\text{sen}^{-1}\,x$ é o recíproco do sen x, mas o recíproco do seno é a co-secante, e ***não*** o inverso do seno. Você pode pensar que eles poderiam ter sugerido uma maneira menos confusa de indicar o inverso de uma função. Vá entender.

O único truque com funções trigonométricas inversas é memorizar seus *intervalos* – ou seja, o intervalo das suas entradas. Devido ao fato de sen $30^o = \frac{1}{2}$ e sen $150^o = \frac{1}{2}$, não há como saber se o $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ é igual a 30° ou a 150° a não ser que você saiba como o intervalo das entradas é definido. E lembre-se, para que algo seja uma função, não pode haver nenhum mistério sobre a entrada de uma dada saída. Se você reflete a função seno sobre a linha $y = x$ para criar o seu inverso, você tem uma onda vertical que não é uma função porque não passa no teste da linha vertical. (Veja a definição do teste da linha vertical no Capítulo 5). Para tornar o inverso do seno uma função, você tem que pegar um pequeno pedaço da onda vertical que passa pelo teste da linha vertical. Aqui estão os intervalos:

O intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ou $[-90^o, 90^o]$

O intervalo do $\cos^{-1} x$ é $[0, \pi]$ ou $[0^o, 180^o]$

O intervalo da $\text{tg}^{-1} x$ é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ou $[-90^o, 90^o]$

O intervalo da $\text{cotg}^{-1} x$ é $[0, \pi]$ ou $[0^o, 180^o]$

Note o padrão: o intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ é o mesmo da $\text{tg}^{-1} x$, e o intervalo do $\cos^{-1} x$ é o mesmo da $\text{cotg}^{-1} x$.

Acredite se quiser, mas os autores de cálculo não concordam com o intervalo para as funções do inverso da secante e da co-secante. Você pensou que eles concordavam sobre isso assim como concordam com quase completamente todo o resto em matemática. Tolice. Use os intervalos dados no seu livro em particular. Se você não tem um livro, use o intervalo do $\text{sen}^{-1} x$ para o seu primo $\text{cosec}^{-1} x$, e use o intervalo do $\cos^{-1} x$ para $\sec^{-1} x$ (Por sinal, eu não me refiro a $\text{cosec}^{-1} x$ como o recíproco do $\text{sen}^{-1} x$ porque não é o seu recíproco – mesmo que cosec x seja o recíproco de sen x. O mesmo para $\cos^{-1} x$ e $\sec^{-1} x$).

Identificando com Identidades Trigonométricas

Você se lembra das identidades trigonométricas $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ e sen $2x = 2\text{sen}\, x \cos x$? Diga a verdade agora – a maioria das pessoas se lembra das identidades trigonométricas assim como se lembra dos presidentes do século dezenove. Elas são úteis no cálculo, então uma lista de outras identidades úteis está na folha de consulta.

Parte III

Limites

A 5ª onda Por Rich Tennant

Nesta parte...

A matemática dos limites fundamenta todo o cálculo. De certa forma, limites nos permitem ampliar um gráfico de uma curva – mais e mais e mais até o infinito – até que se torne reto. Uma vez reto, a boa e velha álgebra e geometria podem ser usadas. Essa é a mágica do cálculo.

Capítulo 7

Limites e Continuidade

Neste Capítulo

- Dando uma olhada em limites
- Avaliando funções com intervalos abertos – quebrando as bolas de naftalina
- Explorando a continuidade e a descontinuidade (desprezar a continuidade é extremamente proibido)

Limites são fundamentais para o cálculo diferencial e integral. A definição formal de uma derivada envolve limite assim como a definição de uma integral definida (Se você é realmente uma pessoa empreendedora e não pode esperar para ler as definições reais, dê uma olhada nos Capítulos 9 e 13). Agora, constata-se que depois de você aprender os atalhos para calcular derivadas e integrais, você não vai mais precisar usar os métodos de limite longos. Mas entender a matemática dos limites é, todavia, importante porque forma a base na qual a vasta arquitetura do cálculo está construída (Ok, então eu exagerei um pouco). Nesse capítulo, eu mostro a base para diferenciação e integração ao explorar limites e o tópico intimamente relacionado, continuidade.

Leve ao Limite – NÃO

Limites podem ser complicados. Mas não se preocupe se você não compreender o conceito de uma vez.

O *limite* de uma função (se ele existir) para algum valor de x, a, é a altura da qual a função cada vez mais se aproxima à medida que x se aproxima de a pela esquerda e pela direita.

Entendeu? Você está brincando! Deixe-me dizer de outra maneira. Uma função tem um limite para um dado valor de x se a função zera em algum ponto à medida que x se aproxima ao dado valor pela esquerda e pela direita. Isso ajudou? Eu achei que não. É muito mais fácil entender limites através de exemplos do que através dessa bobagem, então dê uma olhada em alguns.

Usando três funções para ilustrar o mesmo limite

Considere a função $f(x) = 3x + 1$ na Figura 7-1. Quando nós dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 é 7, escrito como $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$, nós queremos dizer que à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda ou pela direita, $f(x)$ se aproxima de uma altura igual a 7. Por sinal, até onde eu sei, o número 2 nesse exemplo não tem um nome formal, mas eu o chamo de número x. Com o x em seu nome, você não vai confundi-lo com a ***resposta*** para o problema de limite ou simplesmente ***limite***, ambos se referem a um valor y ou altura da função (7 nesse exemplo). Agora, olhe a Tabela 7-1.

Figura 7-1: O gráfico de $f(x) = 3x + 1$.

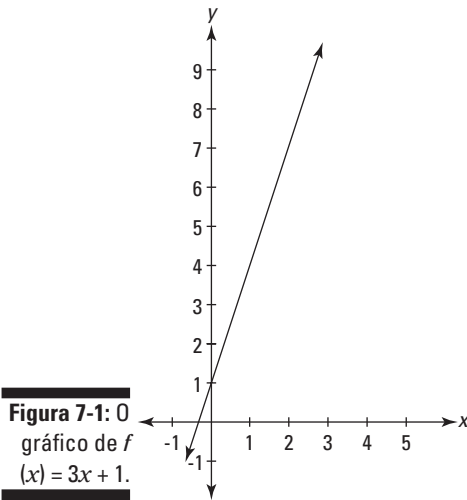



Tabela 7-1 **Valores de entrada e saída de f (x) = 3x + 1 à medida que x se aproxima de 2**

x se aproxima de 2 pela esquerda → ← *x* se aproxima de 2 pela direita

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	4	5,5	6,7	6,97	6,997		7,003	7,03	7,3	8,5	10

y se aproxima de 7 → ← *y* se aproxima de 7

A partir da Tabela 7-1, você pode ver que y está cada vez mais perto de 7 em ambos os lados. Se você estiver pensando sobre porque todo o alvoroço – porque não colocar o número 2 no lugar de x e obter uma resposta igual a 7 – eu tenho certeza que você tem muita companhia. Aliás, se todas as funções fossem ***contínuas*** (sem descontinuidades, sem "quebras") como a da Figura

7-1, você poderia apenas colocar o número x para ter a resposta, e não haveria necessidade desse tipo de problema sobre limite. Nós precisamos de limites em cálculo por causa das importantes funções que têm buracos.

A função na Figura 7-2 é idêntica à função na Figura 7-1 exceto pelo buraco no ponto (2,7) e o ponto em (2,5).

Na verdade, essa função, $g(x)$, nunca apareceria em um problema de cálculo simples – Eu apenas uso para ilustrar como os limites funcionam (Continue lendo, eu tenho mais coisas essenciais para mostrar antes de você ver porque eu as coloquei aqui).

As funções importantes são as funções como as da Figura 7-3, que aparecem com freqüência no estudo das derivadas. A terceira função, $h(x)$, é idêntica a $f(x)$ exceto pelo fato de o ponto (2,7) ter sido arrancado, deixando um buraco em (2,7) e nenhum outro ponto onde x seja igual a 2.

Imagine que a tabela de valores de entrada e saída seja parecida para $g(x)$ e $h(x)$. Você pode ver que os valores seriam idênticos aos valores na Tabela 7-1 para $f(x)$? Tanto para $g(x)$ como para $h(x)$, à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda e pela direita, y se aproxima cada vez mais de uma altura igual a 7. Para todas as três funções, o limite à medida que x se aproxima de 2 é 7. Isso nos leva a um ponto crítico: quando determinamos o limite de uma função à medida que x se aproxima, digamos que de 2, o valor de $f(2)$ – ou mesmo se $f(2)$ realmente existe – é totalmente irrelevante. Dê uma olhada nas três funções novamente na Figura 7-4.

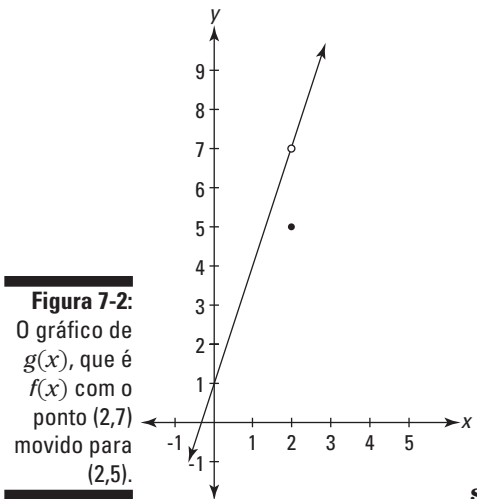



Figura 7-2: O gráfico de $g(x)$, que é $f(x)$ com o ponto (2,7) movido para (2,5).

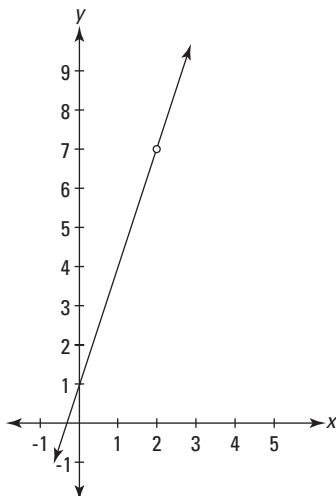



Figura 7-3: O gráfico de $h(x)$: a função $f(x)$ com um buraco em (2,7).

Considere as três funções onde $x = 2$: $f(2)$ é igual a 7, $g(2)$ é 5, e $h(2)$ não existe (ou, como os matemáticos dizem, é ***indefinida***). Mas quando você está calculando o limite dessas funções à medida que x se aproxima de 2, o que realmente acontece em $x = 2$ é irrelevante. "E se em $x = 2$ a função fizer assim e assado?" você talvez pergunte. Não importa – não há se, e, ou, mas.

Em um problema sobre limite, x se aproxima cada vez mais do número x, mas *nunca chega lá*, e o que acontece com a função quando x é igual ao número ***x não tem efeito*** na resposta do problema sobre limite (embora para funções contínuas como f(x), o valor da função é igual ao limite e pode ser usado para calcular o limite).

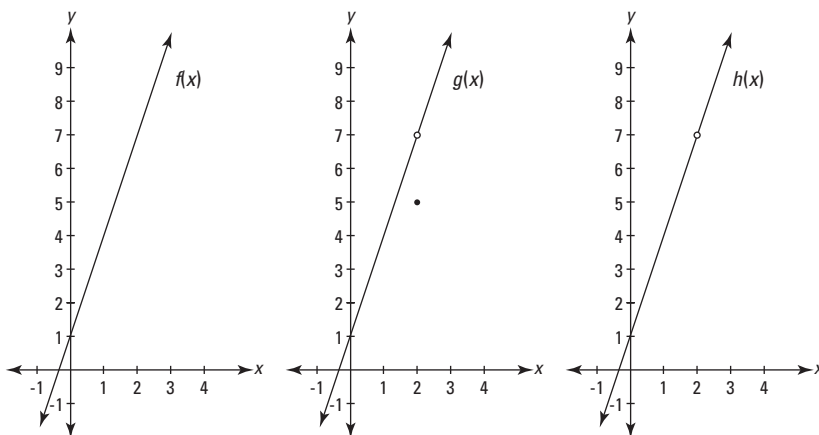



Figura 7-4: Os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, e $h(x)$.

Andando de lado com limites laterais

Limites laterais funcionam como limites bilaterais regulares com exceção do *x* se aproximar do número *x* apenas pela esquerda ou pela direita. O objetivo mais importante para esses tipos de limites é que eles são usados na definição formal de um limite regular (veja o próximo tópico sobre definição formal de um limite).

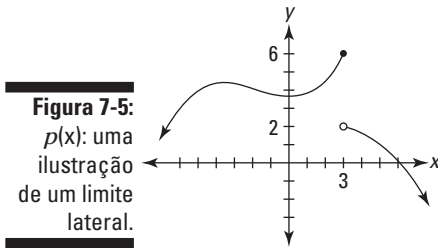
Para indicar um limite lateral, você coloca um pequeno sinal de subtração sobrescrito no número *x* quando *x* se aproxima do número *x* pela esquerda ou um sinal de adição sobrescrito quando o *x* se aproxima do número *x* pela direita. Dessa maneira:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

Olhe a Figura 7-5. A resposta para um problema sobre limite regular, $\lim_{x \to 3} p(x)$z é que o limite não existe porque *x* se aproxima de 3 pela esquerda *e* pela direita, $p(x)$ não tende a zero em nenhum ponto.

No entanto, ambos os limites laterais existem. À medida que *x* se aproxima de 3 pela esquerda, os zeros de $p(x)$ estão a uma altura igual a 6, e quando *x* se aproxima de 3 pela direita, os zeros de $p(x)$ estão a uma altura igual a 2. Assim como os limites regulares, o valor de $p(3)$ não tem efeito na resposta de nenhum desses problemas de limites laterais. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} p(x) = 6 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 3^+} p(x) = 2$$

Figura 7-5: *p*(x): uma ilustração de um limite lateral.

Uma função do tipo p(x) na Figura 7-5 é chamada de função definida por partes porque tem pedaços separados. Cada pedaço de uma função definida por partes tem sua própria equação – como, por exemplo, a função de três pedaços a seguir:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x \le 1 \\ 3x - 2 & \text{para} \quad 1 < x \le 10 \\ x + 5 & \text{para} \quad x > 10 \end{cases}$$

Algumas vezes um pedaço de uma função definida por partes se conecta com o pedaço vizinho, e nesse caso a função é contínua nesse pedaço. E algumas vezes, assim como $p(x)$, um pedaço não se conecta com o pedaço adjacente – isso resulta em uma descontinuidade.

A definição formal de limite – o que você estava esperando

Agora que você sabe sobre limites laterais, eu posso dar a você a definição matemática de um limite. Aqui vai:

Definição de limite: Deixe que *f* seja uma função e deixe que *a* seja um número real.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe se, e somente se}$$

1. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existir

2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existir

3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Livros de cálculo sempre apresentam isso como um teste de três partes para a existência de um limite, mas a condição 3 é a única que você precisa se preocupar porque 1 e 2 estão inseridas na 3. Apenas lembre que você não pode satisfazer a condição 3 se o lado esquerdo e o direito da equação forem ambos indefinidos ou inexistentes; em outras palavras, *não* é verdade que *indefinido* = *indefinido* ou que *inexistente* = *inexistente*. Desde que você tenha entendido isso, a condição 3 é tudo o que você precisa verificar.

Quando nós dizemos que um limite existe, isso significa que o limite é igual a um número *finito*. Alguns limites são iguais ao infinito ou ao infinito negativo, mas você, no entanto, diz que eles *não existem*. Isso pode parecer estranho, mas leve o que eu digo em consideração (Mais sobre limites infinitos no próximo tópico).

Limites infinitos e assíntotas verticais

Uma função *racional* como $f(x) = \frac{(x+2)\,(x-5)}{(x-3)\,(x+1)}$ tem assíntotas verticais no ponto $x = 3$ e $x = -1$. Você se lembra das assíntotas? Elas são linhas imaginárias das quais uma função se aproxima cada vez mais à medida que sobe, desce, vai para a esquerda, ou para a direita em direção ao infinito. Veja a Figura 7-6.

Considere o limite da função na Figura 7-6 à medida que *x* se aproxima de 3. À medida que *x* se aproxima de 3 pela esquerda, $f(x)$ sobre para ∞; e à medida que *x* se aproxima de 3 pela direita, $f(x)$ desce para $-\infty$. Algumas vezes é informativo indicar isso escrevendo,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

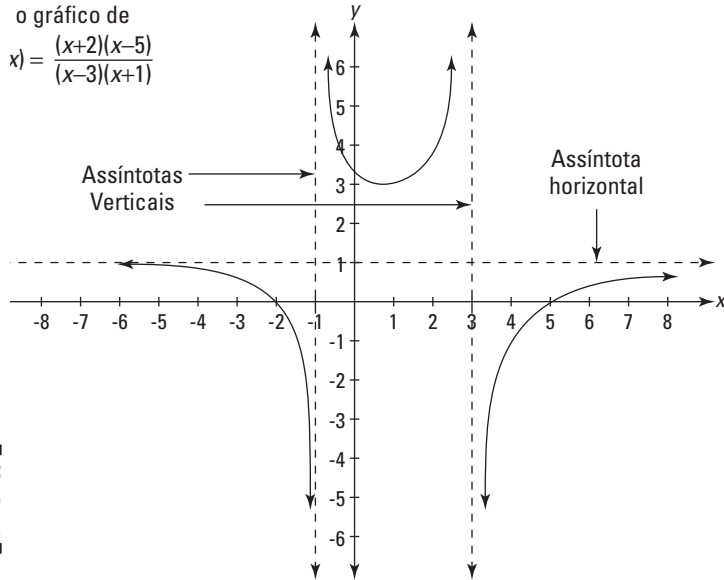



Figura 7-6: Uma função racional típica.

Mas também é correto dizer que ambos os limites acima *não existem* porque o infinito não é um número real. Se pedirem a você para determinar um limite bi-lateral regular, $\lim_{x \to 3} f(x)$, você não tem escolha a não ser dizer que ele não existe porque os limites da esquerda e da direita são desiguais.

Limites no infinito – bem distantes, cara!

Até agora eu olhei para limites onde o *x* se aproxima de um número finito e regular. Mas x também pode se aproximar de ∞ ou –∞. Limites no infinito existem quando a função tem uma assíntota horizontal. Por exemplo, a função na Figura 7-6, $f(x) = \frac{(x+2)\,(x-5)}{(x-3)\,(x+1)}$, tem uma assíntota horizontal em $y = 1$, no qual a função se move à medida que segue na direção do ∞ para a direita e –∞ para a esquerda (Indo para a esquerda, a função cruza a assíntota horizontal em $x = -7$ e depois vai gradualmente descendo em direção a assíntota). Os limites são iguais à altura da assíntota horizontal e escritos como:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Você verá mais sobre limites no infinito no Capítulo 8.

Calculando a velocidade instantânea usando limites

Se você estava cochilando até agora, ACORDE! O problema a seguir, que eventualmente se torna um exemplo de problema sobre limite (eu prometo), traz você para o ponto inicial do cálculo propriamente dito. Digamos que você e o seu gato que adora cálculo estejam passeando um dia e você decida soltar uma bola da sua janela do segundo andar. Aqui está a fórmula que te diz a altura da bola depois de passados alguns segundos (ignorando a resistência do ar):

$$h(t) = 5t^2$$

(onde h é a altura da qual a bola caiu, em metros, e t é o valor do tempo desde que a bola foi jogada, em segundos)

Se você colocar 1 no lugar de t, h é 5; então a bola cai 5 metros durante o primeiro segundo. Durante os 2 primeiros segundos, ela cai um total de $5 \cdot 2^2$, ou 20 metros, e assim sucessivamente. Agora, e se você quisesse determinar a velocidade da bola a exatamente 1 segundo depois que você a jogou? Você pode começar usando essa velha e confiável fórmula:

Distância = *velocidade* · *tempo*, então *velocidade* = *distância/tempo*

Usando a fórmula da *velocidade*, você pode descobrir facilmente a velocidade média da bola no 2° segundo da sua queda. Devido ao fato de a bola ter caído 5 metros depois de 1 segundo e um total de 20 metros depois de 2 segundos, ela caiu 20 – 5, ou 15 metros de t = 1segunto até t = 2 segundos. A fórmula a seguir lhe dá a velocidade média:

$$\begin{aligned}\text{Velocidade média} &= \frac{\text{distância total}}{\text{tempo total}}\\ &= \frac{20-5}{2-1}\\ &= \frac{15}{1}\\ &= \textit{15 metros por segundo}\end{aligned}$$

Mas essa não é a resposta que você quer porque a bola cai cada vez mais rápido à medida que ela cai, e você quer saber a sua velocidade a exatamente 1 segundo depois que você a joga. A bola acelera entre 1 e 2 segundos, então a sua velocidade *média* de 15 *metros por segundo* durante os 2 segundos é certamente mais rápida do que a velocidade *instantânea* no final do 1° segundo. Para uma melhor aproximação, calcule a velocidade média entre t = 1 e t = 1,5 segundos. Depois de 1,5 segundos, a bola caiu $5 \cdot 1{,}5^2$, ou 11,25 metros, então de t = 1 até t = 1,5, ela cai 11,25 – 5, ou 6,25 metros. Sua velocidade média é assim:

$$\begin{aligned}\text{Velocidade média} &= \frac{11{,}25 - 5}{1{,}5 - 1}\\ &= \frac{6{,}25}{0{,}5}\\ &= 12{,}5 \textit{ metros por segundo}\end{aligned}$$

Se você continuar esse processo para lapsos de tempo de um quarto de segundo, um décimo de segundo, depois um centésimo, milésimo, e dez milionésimos de um segundo, você chega a uma lista de velocidade média mostrada na Tabela 7-2.

Tabela 7-2 Velocidades Média a Partir de 1s até *t* segundos

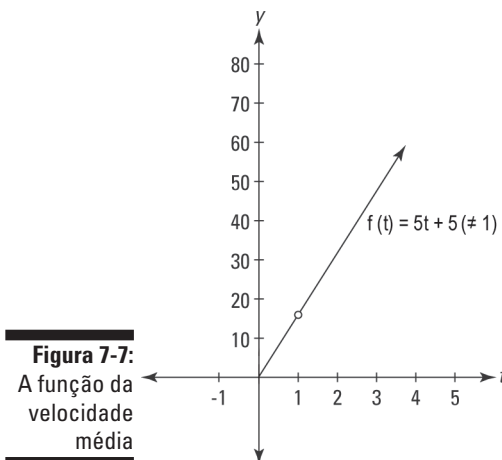
t segundos	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{100}$	$1\frac{1}{1.000}$	$1\frac{1}{10.000}$
velocidade média de 1s até t segundos	15	12,5	11,25	10,5	10,05	10,005	10,0005

À medida que *t* se aproxima cada vez mais de 1 segundo, a velocidade média aparenta se aproximar cada vez mais de 10 *metros por segundo*.

Aqui está a fórmula que nós usamos para gerar os números na Tabela 7-2. Ela lhe dá a velocidade média entre 1 segundo e *t* segundos.

$$\begin{aligned}\textit{Velocidade média} &= \frac{5t^2 - 5 \cdot 1}{t - 1}\\ &= \frac{5\,(t^2 - 1)}{t - 1}\\ &= \frac{5\,(t-1)(t+1)}{t - 1}\\ &= 5t + 5 (t \neq 1)\end{aligned}$$

A Figura 7-7 mostra o gráfico dessa função.

Figura 7-7: A função da velocidade média

Esse gráfico é idêntico ao gráfico da linha $g(t) = 16t + 16$, exceto pelo buraco em (1,10). Há um buraco lá porque se você colocar 1 no lugar de t na função da velocidade média, você tem

$$\begin{aligned} \textit{Velocidade média} &= \frac{5\,(1^2 - 1)}{1 - 1} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

que é indefinido. E por que você obteve $\frac{0}{0}$? Porque você estava tentando determinar a velocidade média – que é igual à ***distância total*** dividida pelo ***tempo decorrido*** – de $t = 1$ a $t = 1$. Mas de $t = 1$ até $t = 1$ ***não*** é, é claro, tempo, e "durante" esse ponto no tempo, a bola não percorre nenhuma distância, então você tem $\frac{\text{zero metros}}{\text{zero segundo}}$ como a velocidade média entre $t = 1$ e $t = 1$.

Obviamente, há um problema aqui. Segure o seu chapéu, você chegou a um dos grandes momentos "A-ha!" no desenvolvimento de cálculo diferencial.

Velocidade instantânea é definida como o limite da velocidade média à medida que o tempo decorrido se aproxima do zero.

O fato de que o tempo decorrido nunca chega a zero não afeta a precisão da resposta para esse problema sobre limite – a resposta é exatamente 10 ***metros por segundo***, a altura do buraco na Figura 7-7. O que é incrível sobre limites é que eles permitem que você calcule a velocidade instantânea exata em um ***determinado*** ponto no tempo achando o limite de uma função que está baseado no tempo ***decorrido***, um período entre ***dois*** pontos no tempo.

Unindo Limites e Continuidade

Antes que eu amplie o material incrivelmente maravilhoso sobre limites que apresentei nas seções anteriores desse capítulo, eu quero introduzir uma idéia correlata – ***continuidade***. Esse é um conceito super simples – de verdade, confie em mim. Uma função ***contínua*** é simplesmente uma função sem intervalos – uma função que você pode desenhar sem tirar o lápis do papel. Considere as quatro funções na Figura 7-8.

Se uma função é ou não contínua é quase sempre óbvio. As duas primeiras funções na Figura 7-8 – $f(x)$ e $g(x)$ – não tem interrupções então elas são contínuas. As próximas duas – $p(x)$ e $q(x)$ – têm interrupções em x=3, então elas não são contínuas. Pronto, resolvido. Bem, não realmente. As duas funções com interrupções não são contínuas em todos os lugares, mas devido ao fato de você poder desenhar seções delas sem tirar o lápis do papel, você pode dizer que partes dessas funções são contínuas. E algumas vezes a função é contínua em qualquer lugar que seja definida. Esse tipo de função é descrita como sendo *contínua sobre todo o seu*

domínio, e significa que seu intervalo ou intervalos acontecem em valores de x onde a função é indefinida. A função $p(x)$ não é contínua sobre todo o seu domínio porque não é contínua em $x = 3$, que está no domínio da função. Muitas vezes, o importante é se uma função é contínua em um dado valor de x. E ela é a não ser que haja uma interrupção naquele x.

Todas as funções polinomiais são contínuas em todas as partes.

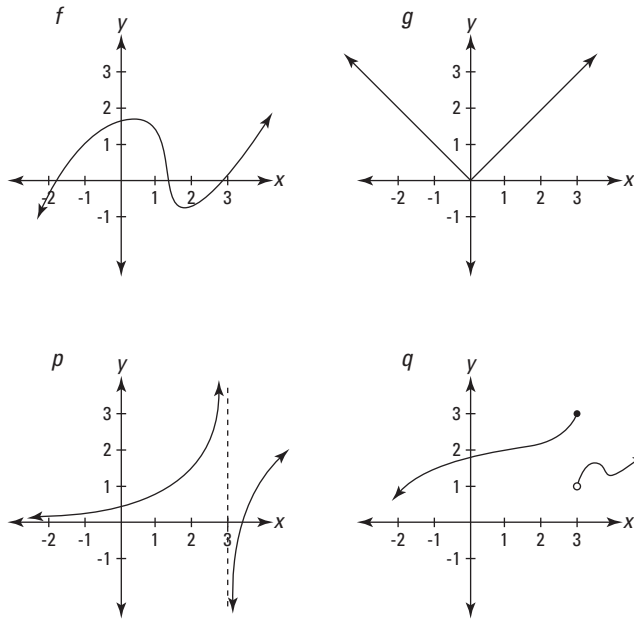



Figura 7-8: Os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, e $q(x)$.

Todas as funções racionais – uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais – são contínuas sobre todo o seu domínio.

Continuidade e limites normalmente andam juntos

Olhe para $x = 3$ nas quatro funções na Figura 7-8. Considere se cada função é contínua nesse ponto e se existe um limite no valor de x. As duas primeiras, f e g, não têm interrupções em $x = 3$, então elas são contínuas nesse ponto. Ambas as funções também têm limites em $x = 3$, e em ambos os casos, o limite é igual à altura da função em $x = 3$, porque o x se aproxima cada vez mais de 3 pela esquerda e pela direita, y se aproxima cada vez mais de $f(3)$ e $g(3)$, respectivamente.

As funções p e q, por outro lado, não são contínuas em $x = 3$ – ou você pode dizer que elas são descontínuas nesse ponto – e nenhuma tem limite em $x = 3$. Para ambas as funções, as interrupções em $x = 3$ não apenas quebram a

continuidade, mas também fazem com que elas não tenham limites nesse ponto porque, à medida que você move em direção a $x = 3$ pela esquerda ou pela direita, você não tende a um valor específico de y.

Então aqui está. Continuidade em um valor de x significa que há um limite para esse valor de x. Descontinuidade em um valor de x significa que não há limite nesse lugar. Bem, quase. Continue lendo para saber a exceção.

A exceção do intervalo aberto conta toda a história

A exceção do intervalo aberto é a única exceção para a regra que diz que a continuidade e o limite andam juntos, mas é uma *importante* exceção. E, eu tenho que admitir, é um pouco estranho dizer que continuidade e limite *geralmente* andam juntos e falar sobre essa *exceção* porque a exceção é o ponto crucial. Quando você chega aqui, a exceção é mais importante do que a regra. Considere as duas funções na Figura 7-9.

Essas funções têm interrupções em $x = 3$ e não são obviamente contínuas nesse ponto, mas têm limites à medida que x se aproxima de 3. Em cada caso, o limite é igual à altura do intervalo aberto.

Um intervalo aberto infinitesimal em uma função é o único lugar em que a função pode ter um limite onde *não* é contínuo.

Então ambas as funções na Figura 7-9 têm os mesmo limite à medida que x se aproxima de 3; o limite é 9, e o fato de que $r(3) = 2$ e que $s(3)$ é indefinido é irrelevante. Para ambas as funções, à medida que x tende a 3 pela direita e pela esquerda, a altura da função tende a nove na altura do intervalo aberto – esse é o limite. Isso tolera repetição – e até um ícone:

O limite de um intervalo aberto é a altura do mesmo

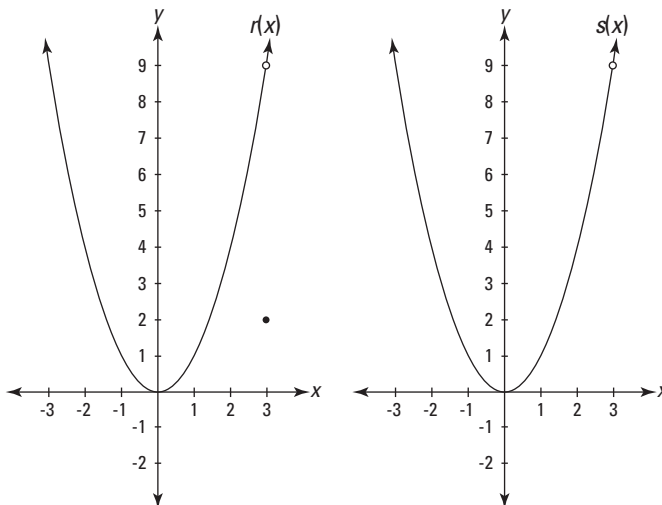



Figura 7-9: Os gráficos de $r(x)$ e $s(x)$.

"Isso é ótimo", você deve estar pensando."Mas por que você deveria se preocupar?". Bem continue comigo por apenas um minuto. No exemplo da bola caindo no tópico "Calculando a velocidade instantânea usando limites" no começo do capítulo, eu tentei calcular a velocidade média durante o intervalo de tempo igual a zero. Isso me deu $\frac{\text{zero metros}}{\text{zero segundo}}$. Devido ao fato de $\frac{0}{0}$ ser indefinido, o resultado foi um intervalo aberto na função. Intervalos abertos nas funções freqüentemente vêm da impossibilidade de dividir zero por zero. É nessas funções que o processo do limite é crítico, e esses tipos de funções são o coração do significado de uma derivada, e a derivada é o coração do cálculo diferencial.

Uma derivada sempre envolve a fração indefinida $\frac{0}{0}$ e sempre envolve o limite de uma função com um intervalo aberto (Se você está curioso, todos os limites do Capítulo 9 – onde a derivada é formalmente definida – são limites de funções com intervalos abertos).

Descobrindo a bobagem matemática da continuidade

Tudo que você precisa saber para *entender* plenamente a idéia de continuidade é que a continuidade de uma função em um dado valor de x significa que não há intervalo nesse valor. No entanto, visto que você pode ser testado na definição formal a seguir, eu suponho que você vá querer saber.

Definição de continuidade: Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = a$ se as três condições a seguir forem satisfeitas:

1. $f(a)$ é definido,

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe, e*

3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Assim como a definição formal de limite, a definição de continuidade está sempre presente como um teste de 3 partes, mas a condição 3 é a única com a qual você precisa se preocupar porque as condições 1 e 2 estão inseridas na 3. Você deve se lembrar, no entanto, que a condição 3 *não* é satisfeita quando tanto o lado esquerdo como o lado direito da equação forem indefinidos ou inexistentes.

O Mnemônico 33333 do Limite

Aqui está um ótimo dispositivo de memória que coloca um bocado de informação junta em uma tacada de mestre. Isso talvez pareça forçado ou bobo, mas com dispositivos mnemônicos, forçado e bobo funcionam. O mnemônico 33333 do limite ajuda você a se lembrar de duas coisas sobre limites, duas coisas sobre continuidade e uma coisa sobre derivadas (eu sei que ainda não chegamos a derivadas, mas este é o melhor lugar para apresentar esse mnemônico. Acredite no que eu digo – nada é perfeito).

Primeiro, note que a palavra "*limit*" tem cinco letras e há cinco 3s nesse mnemônico. Depois, escreva *limit* com um *l* minúsculo e tire o traço do "*t*" para que ele se torne um "*l*" – assim:

limil

Agora, os dois "*l*"s são para limite, os dois "*i*"s são para continuidade (note que a letra "*i*" tem um buraco nela, não sendo, dessa forma, contínuo), e o "*m*" é para inclinação (você se lembra de $y = mx + b$?), que é sobre o que as derivadas falam (você verá isso daqui a algumas páginas no Capítulo 9).

Cada uma das cinco letras ajuda você a se lembrar de três coisas – dessa maneira:

l i m i l
3 3 3 3 3

- 3 partes para a definição de um limite:

  Veja a definição de limite no tópico "Definição formal de limite". Lembrando-se que ela tem três partes que ajudam você a lembrar das partes – confie em mim.

- 3 casos onde o limite não existe:
  - Em uma assíntota vertical – chamada de *descontinuidade infinita* – como em $x = 3$ na função p na Figura 7-8.
  - *Pulos de descontinuidades*, como em $x = 3$ na função q na Figura 7-8.
  - Com um limite no infinito de uma *função oscilante* como $\lim_{x \to \infty} f(x)$ sen x, onde a função sobe e desce para sempre, nunca tendendo a um valor definido.

- 3 partes para a definição de continuidade:

  Assim como a definição de limite, lembrar que a definição de continuidade tem 3 partes ajuda você a lembrar as 3 partes (veja o tópico "Descobrindo a bobagem matemática da continuidade" abordado anteriormente no capítulo).

- 3 tipos de descontinuidade:
  - Uma *descontinuidade removível* – esse é um termo mais sofisticado para um *intervalo aberto* – como os intervalos na função ***r*** e ***s*** na Figura 7-9.
  - Uma *descontinuidade infinita* como em $x = 3$ na função ***p*** na Figura 7-8.
  - *Pulos de descontinuidades*, como em x= 3 na função ***q*** na Figura 7-8.
- 3 casos onde a derivada não existe:

  (Eu explico isso no Capítulo 9 – fique calmo)
  - Em qualquer tipo de *descontinuidade*.
  - Em um ponto acentuado de uma função – chamado de inflexão.
  - Em uma *tangente vertical* (porque a inclinação é indefinida nesse lugar).

Bem, aí está.

Você provavelmente notou que a outra maneira que esse mnemônico funciona é que ele lhe dá 3 casos onde um limite não existe, 3 casos onde a continuidade não existe, e 3 casos onde a derivada não existe. *Santo triplo trio de inexistência Batman, isto ainda é outro 3 – os 3 tópicos do mnemônico: limites, continuidade, e derivadas!*

Capítulo 8
Avaliando Limites

Neste Capítulo

- Calculando limites com uma calculadora
- Multiplicando conjugados
- Resolvendo limites com um sanduíche
- Encontrando limites no infinito

O Capítulo 7 introduziu o conceito de limite. Esse capítulo fala dos elementos básicos e apresenta muitas técnicas para calcular as respostas para problemas sobre limites. E enquanto eu suspeito que você esteja extremamente extasiado e totalmente horrorizado pelo material no Capítulo 7 – e, não me entenda mal, isso é coisa importante – são os métodos de resolução de problemas nesse capítulo que realmente pagam as contas.

Limites Fáceis

Alguns problemas de limites são *muito* fáceis. Tão fáceis que eu não preciso tomar seu tempo com comentários introdutórios desnecessários e palavras dispensáveis que ocupam espaço e não fazem nada para aprofundar o seu conhecimento da matéria – em vez disso, eu posso apenas dizer o que é importante e lhe dar apenas os fatos críticos e ir direto ao ponto e começar a trabalhar e... Ok, você está pronto?

Limites para memorizar

Você deve memorizar os limites a seguir. Se você fracassar em decorar os três últimos, você pode perder *muito* tempo tentando descobri-los. Leve o que eu digo em consideração.

- $\lim_{x \to a} c = c$
- ($y = c$ é uma linha horizontal, então o limite – que é a altura da função – deve ser igual a c não importando o número x).
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Pegue e Leve

Os problemas "pegue e leve" (plug-and-chug) fazem parte da segunda categoria de limites fáceis. Apenas plugue um número na função limite, e se o cálculo resultar em um número, essa é a sua resposta. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 10) = -1$$

Esse método funciona pra limites envolvendo funções contínuas e funções que são contínuas sobre todo o seu domínio. Esses são problemas sobre limite bobos, e, para ser sincero, eles não têm nexo. O limite é simplesmente o valor da função.

O método plug-and-chug funciona para qualquer tipo de função, incluindo funções definidas por partes, *a não ser* que haja uma descontinuidade no número x que você plugou (Veja o Capítulo 7 para uma descrição sobre funções definidas por partes).

Se você plugar o número x em um limite do tipo $\lim_{x \to 5} \frac{10}{x-5}$ e obtiver qualquer número (exceto zero) dividido por zero – como $\frac{10}{0}$ – então você sabe que esse limite não existe.

Os "Verdadeiros" Problemas Sobre Limites

Nenhum dos métodos rápidos que eu apresentei no tópico anterior funciona para a maioria dos problemas sobre limites. Se você plugar o número x e o resultado for indefinido, em geral $\frac{0}{0}$, você tem um problema sobre limite "verdadeiro" – e um pouco de trabalho para fazer. Esse é o foco principal desse tópico. Esses são os problemas sobre limites interessantes, os que provavelmente têm buracos infinitesimais, e os que são importantes para o cálculo diferencial – você verá mais sobre eles no Capítulo 9.

Quando você pluga um número x e o resultado é indefinido, você pode tentar quatro coisas: sua calculadora, a álgebra, fazer um sanduíche de limite, e a regra de L'Hôspital (que será vista no Capítulo 16).

Descobrindo o limite com a sua calculadora

Digamos que você queira avaliar o seguinte limite: $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. O método plug-and-chug não funciona porque plugando 5 no lugar de x produz o resultado indefinido de $\frac{0}{0}$, mas assim como a maioria dos problemas sobre limites, você pode resolver esse problema na sua calculadora.

Método 1

O primeiro método é pegar um número extremamente perto de 5 e plugar no lugar de x. Se você tiver uma calculadora como a Texas Instruments TI-83, digite o seu número, digamos 4,9999, na página inicial, pressione o botão *Sto* (armazenar), depois o botão x, e por fim o botão *Enter* (isso guarda o número em x). Depois introduza a função $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, e aperte *Enter*. O resultado, 9,9999, é extremamente perto de um número inteiro, 10, então essa é a sua resposta. Em adição a isso, armazene 4,999999 em x, depois suba a barra de rolagem de volta para a função teclando *2nd*, *Enter*, *2nd*, *Enter*. Teclando *Enter* mais uma vez lhe dá 9,999999 – muito mais perto de 10. Se você ainda tiver dúvidas, tente mais um número. Armazene 4,99999999 em x, volte para a função, e aperte *Enter*. O resultado, 10, aparece (O valor da função em 4,99999999 não é exatamente 10, mas é tão perto que a calculadora arredonda para 10). A propósito, se você estiver usando um modelo de calculadora diferente, é bem provável que você encontre o mesmo resultado com a mesma técnica ou algo bem parecido.

Método 2

O segundo método usando uma calculadora é produzir uma tabela de valores. Digite $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ no modo de desenhar gráficos na sua calculadora. Depois vá para "configurar tabela" e digite o número do limite, 5, como o número "inicial da tabela", e digite um número pequeno, digamos 0,01, para ΔTbl – esse é o tamanho dos incrementos de x na tabela. Aperte o botão *Table* para produzir a tabela. Agora suba a barra de rolagem para que você veja alguns números menores do que 5, e você deve ver uma tabela de valores como os da Tabela 8-1.

Tabela 8-1 Tabela TI-83 para $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ Depois de Subir a Barra de Rolagem até 4,998

x	y
4,998	9,998
4,999	9,999
5	*erro*
5,001	10,001
5,002	10,002
5,003	10,003

Devido ao fato de y chegar bem perto de 10 à medida que x se aproxima de 5 por cima e por baixo, 10 é o limite.

Essas técnicas em calculadoras são úteis por várias de razões. Sua calculadora pode lhe dar as respostas para problemas sobre limites que são impossíveis de serem feitos algebricamente. E ela pode resolver problemas sobre limite que você poderia fazer com papel e lápis a menos que você esteja confuso. Também, para problemas que você faz no papel, você pode usar a calculadora para verificar suas respostas. E mesmo quando você escolhe resolver um limite algebricamente – ou é obrigado a fazer dessa maneira – é uma boa idéia criar uma tabela como a Tabela 8-1 não apenas para confirmar sua resposta, mas para ver como a função se comporta perto do número x. Isso dá a você uma compreensão numérica sobre o problema, o que aumenta seu entendimento algébrico. Se você olhar o gráfico da função na sua calculadora, você tem uma terceira maneira *gráfica* ou *visual* de pensar sobre o problema.

Muitos problemas de cálculo podem ser feitos *algebricamente*, *graficamente* e *numericamente*. Quando possível, use duas ou três dessas abordagens. Cada abordagem dá a você uma entrada diferente no problema e aumenta o seu entendimento sobre os conceitos relevantes.

Use os métodos da calculadora para complementar os métodos algébricos, mas não confie muito neles. Para começo de conversa, as técnicas da calculadora não vão lhe dar uma resposta exata a não ser que os números que a sua calculadora lhe dá estejam se aproximando de um número que você reconhece – como 9,99998 está perto de 10, ou 0,333332 está perto de 1/3; ou talvez você reconheça que 1,414211 está bem perto de $\sqrt{2}$. Mas se a resposta para um problema sobre limites é algo do tipo $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, você provavelmente não vai reconhecer isso. O número $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ é aproximadamente igual a 0,288675. Quando você vê números na sua tabela perto desse decimal, você não vai reconhecer $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ como o limite – a não ser que você seja um Arquimedes, um Gauss, ou um Ramanujan (membros da Galeria da Fama da matemática). No entanto, mesmo quando você não reconhece a resposta *exata* nesses casos, você ainda pode descobrir uma resposta aproximada, na forma decimal, para a questão do limite.

A segunda limitação da calculadora é que ela não vai funcionar com algumas funções peculiares como $\lim_{x \to 5} \sqrt[25]{x-5} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x-5}\right)$. Esse limite é igual a zero, mas você não pode achar essa resposta com a sua calculadora.

A propósito, mesmo quando o método da calculadora funciona, as calculadoras podem fazer algumas coisas esquisitas de tempos em tempos. Por exemplo, se você está resolvendo um problema sobre limite onde x se aproxima de 3, e você coloca números na sua calculadora que são muito perto de 3 (como 3,0000000001), você pode chegar bem perto do alcance decimal máximo da calculadora. Isso pode resultar em respostas que se *distanciam* da resposta do limite, mesmo quando você coloca números cada vez mais perto do número x.

A moral da história é que você deve pensar na sua calculadora como uma das muitas ferramentas à sua disposição para resolver limites – e não como uma substituta para as técnicas algébricas.

Resolvendo problemas sobre limite com a álgebra

Você usa duas técnicas algébricas importantes para problemas "reais" sobre limite: fatoração e multiplicação conjugada. Eu agrego outras técnicas da álgebra na seção "Álgebra diversa". Todos os métodos algébricos envolvem a mesma idéia básica. Quando a substituição não funciona na função original – geralmente por causa do intervalo aberto na função – você pode usar a álgebra para manipular a função até que a substituição funcione (ela funciona porque a manipulação tampa o intervalo aberto).

Se divertindo com a fatoração

Aqui está um exemplo. Avalie $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$, o mesmo problema que você fez com uma calculadora no tópico anterior.

1. **Tente plugar 5 no lugar de x – você deve sempre tentar primeiro a substituição.**

   Você obtém $\frac{0}{0}$ – não é bom, vá para o plano B.

2. **x^2 – 25 pode ser fatorado, então faça isso.**

   $$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

   $$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

3. **Cancele o (x – 5) do numerador e do denominador.**

   $$= \lim_{x \to 5} (x+5)$$

4. **Agora a substituição vai funcionar.**

   $$= 5 + 5$$

   $$= 10$$

Então, $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$, confirmando a resposta da calculadora.

A propósito, a função que você obteve depois de cancelar o $(x - 5)$, a saber, $(x + 5)$, é idêntica à função original, $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, exceto pelo fato de o intervalo aberto na função original em (5,10) ter sido plugado. E note que o limite à medida que x se aproxima de 5 é 10, que é a altura do intervalo aberto em (5,10).

Multiplicação conjugada – Não, isso não tem nada a ver com produção

Tente esse método para funções racionais que contenham raízes quadradas. A multiplicação conjugada *racionaliza* o numerador ou o denominador de uma fração, o que significa se livrar das raízes quadradas. Tente esse aqui: Avalie $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

1. **Tente a substituição.**

Insira o número 4: isso lhe dá $\frac{0}{0}$ – vá para o plano B.

2. **Multiplique o numerador *e* o denominador pelo conjugado de $\sqrt{x} - 2$, que é $\sqrt{x} + 2$.**

O *conjugado* de uma expressão de dois termos é a mesma expressão com a subtração trocada pela adição e vice-versa. O produto de conjugados é sempre igual ao primeiro termo ao quadrado menos o segundo termo ao quadrado.

Agora faça a racionalização.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x - 4)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

3. Cancele o (x – 4) do numerador e do denominador.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

4. Agora a substituição funciona.

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Então, $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{4}$.

Assim como o exemplo da fatoração, esse processo de racionalização plugou o intervalo aberto na função original. Nesse exemplo, 4 é o número x, $\frac{1}{4}$ é a resposta, e a função $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ tem um intervalo aberto em $(4, \frac{1}{4})$.

Álgebra diversa

Ao fatorar e fazer a multiplicação conjugada não tenha trabalho, tente outra álgebra básica para somar ou subtrair frações, multiplicar ou dividir frações, cancelar, ou outra forma de simplificação. Aqui está um exemplo:

Avalie $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{4}}{x}$.

1. Tente a substituição.

Insira o número 0: isso lhe dá $\frac{0}{0}$ – não é bom.

2. Simplifique a fração complexa (essa é uma fração grande que contém pequenas frações) multiplicando o numerador e o denominador pelo menor denominador comum das pequenas frações, a saber, 4(x + 4).

Nota: Somar as pequenas frações no numerador também funcionaria, mas é mais demorado do que o método descrito aqui.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{4}\right)}{x}\cdot\frac{4\,(x+4)}{4(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{4x(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4(x+4)}$$

3. Agora a substituição funciona.

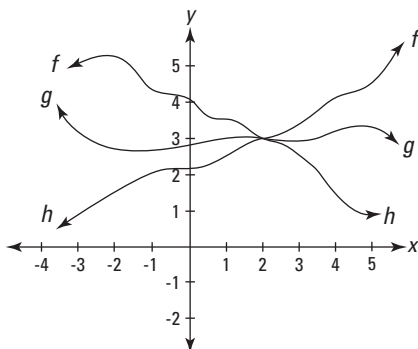
$$=\frac{-1}{4(0+4)}$$

$$=-\frac{1}{16}$$

Esse é o limite.

Faça uma pausa e prepare um sanduíche de limite

Quando a álgebra não funciona, tente fazer um sanduíche de limite. A melhor maneira de entender o método do ***sanduíche*** ou da ***espremedura***[1] é olhando um gráfico. Veja a Figura 8-1.

Figura 8-1: O método do sanduíche para resolver um limite. As funções *f* e *h* são o pão, e *g* é o salame.

Olhe as funções *f*, *g*, e *h* na Figura 8-1: *g* é o sanduíche entre *f* e *h*. Se perto do número *x* – nesse exemplo o número 2 – *f* é sempre maior ou da mesma altura que *g*, e *g* é sempre maior ou da mesma altura que *h*, e se o $\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to 2} h(x)$, então $g(x)$ deve ter o mesmo limite porque está sendo espremido ou apertado entre f e h. O limite de f e h à medida que x se aproxima 2 é 3. Então, 3 também tem que ser o limite de g. Não há nenhum outro lugar pra ir.

Aqui está outro exemplo: Avalie $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

1. **Tente a substituição.**

   Coloque 0 em x. Isso lhe dá uma sen $\frac{1}{0}$ – não é bom, não pode dividir por zero. Vamos para o plano B.

2. **Tente os métodos algébricos ou qualquer outro truque que você tenha na manga.**

   Vá nessa. Você não pode fazer. Plano C.

3. **Tente a calculadora.**

   É sempre uma boa idéia ver o que sua calculadora diz mesmo que esse seja um problema para "mostrar o seu trabalho". Para desenhar o gráfico dessa função, ajuste o modo da sua calculadora para *radiano* e a janela para:

   x min = –0,4

   x max = 0,4

   y min = –0,3

   y max = 0,3

   A Figura 8-2 mostra como o gráfico se parece:

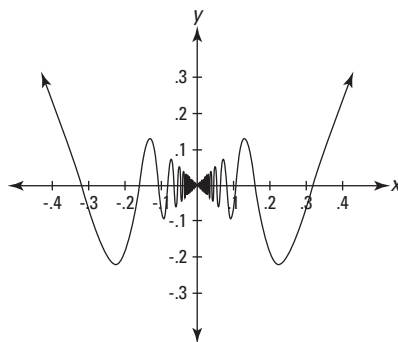



Figura 8-2: O gráfico de $g(x) = x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

Parece que definitivamente o limite de g é zero à medida que x se aproxima de zero pela esquerda e pela direita. Agora, verifique a tabela de valores na sua calculadora (ajuste o *TblStart* para 0 e *ΔTbl* para 0,001). A Tabela 8-2 dá alguns dos valores para a tabela.

Nota: Mova a barra de rolamento para baixo para ver todos os números da Tabela 8-2 na sua calculadora.

Tabela 8-2 Tabela de Valores para $g(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$

x	$g(x)$
0	erro
,001	,0008269
,002	-,000936
,003	,0009565
,004	-,003882
,005	-,004366
,006	-,000969
,007	-,006975
,008	-,004928
,009	-,008234

Esses números se parecem mais ou menos como se estivessem chegando cada vez mais perto de zero à medida que x se aproxima de zero, mas eles não são convincentes. Esse tipo de tabela não funciona tão bem para funções oscilantes como o seno e o cosseno (Note que alguns valores da função na tabela, por exemplo – 0,000969 para $x = 0{,}006$, estão mais perto de zero do que outros valores maiores na tabela onde x é menor. Isso é o oposto do que o que nós queremos ver).

Uma melhor maneira de ver que o limite de g é zero é usar o primeiro método da calculadora que eu mencionei no tópico "Descobrindo o limite com a sua calculadora". Digite a função na tela inicial e insira sucessivamente os valores de x listados na Tabela 8-3 para obter os valores da função correspondentes.

Tabela 8-3 Tabela de Valores para $g(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$

x	$g(x)$
,1	-,054
,01	-,0051
,001	,00083
,0001	-,000031
,00001	,00000036

Agora você pode definitivamente ver que g tende para zero.

A longa e tortuosa estrada

Considere a função, g(x) = x sen $\frac{1}{x}$, mostrada nas Figuras 8-2 e 8-3 e discutida no tópico sobre fazer um sanduíche de limite. Ela é definida em todo lugar exceto em zero. Se nós agora a alterarmos um pouco — definindo que *f*(0) é 0 — nós criamos uma função com propriedades bizarras. A função é agora contínua em todo lugar; em outras palavras, ela não tem intervalos abertos. Mas em (0,0), ela parece contradizer a idéia básica da continuidade que diz que você pode traçar a função sem tirar o lápis do papel.

Imagine começando em qualquer lugar em $g(x)$ para a esquerda do eixo y e dirigir ao longo da estrada tortuosa na origem, (0,0). Veja isso. Você pode começar sua viagem o mais perto que você quiser da origem — o que você acha da largura de um próton longe de (0,0) — e o comprimento da estrada entre você e (0,0) é *infinitamente* longa! Isso mesmo. Ela se enrosca para cima e para baixo com tal frequência crescente à medida que você se aproxima cada vez mais de (0,0), que a duração do seu passeio é na verdade infinita apesar de o fato de cada "reta" estar ficando cada vez menor. Nessa longa e tortuosa estrada, você nunca vai chegar à porta dela.

Essa função alterada é claramente contínua em todos os pontos 0 com a possível exceção do (0,0) — porque é uma estrada tortuosa calma e conectada. E porque o $\lim_{x \to 0}$ x sen $\frac{1}{x}$ = 0 (veja o tópico do sanduíche de limite para prova), e porque *f*(0) é definido como sendo 0, o teste de três partes para continuidade em 0 é satisfeito. A função é então contínua em todo lugar.

Mas me diga, como pode a curva alguma vez tocar (0,0) ou se conectar a (0,0) pela esquerda (ou pela direita)? Supondo que você possa atravessar uma distância infinita dirigindo infinitamente rápido, quando você finalmente passa pela origem, você está em uma das pernas da rua que estão para cima ou uma das pernas que estão para baixo? Nenhum dos dois parece possível porque não importa a distância que você esteja da origem, você tem um número infinito de pernas e um número infinito de curvas na sua frente. Não há uma última curva antes de chegar a (0,0). Então parece que a função não pode se conectar à origem e isso, consequentemente, não pode ser contínuo nesse lugar — apesar de a matemática nos dizer que ela é contínua.

Aqui está outra maneira de olhar para isso. Imagine uma linha vertical desenhada no topo da função em x = -0,2. Agora deslize vagarosamente a linha para a direita ao longo da função até que você passe por (0,0). Não há intervalos abertos na função, então em cada instante, a linha vertical cruza a função em algum lugar. Pense no ponto onde a linha vertical se intercepta com a função. À medida que você puxa a linha para a direita, esse ponto viaja ao longo da função, se enroscando para cima e para baixo ao longo da estrada, e, à medida que você puxa a linha sobre a origem, o ponto chega e depois passa (0,0). Agora me diga o seguinte: quando o ponto atingiu (0,0), ele estava subindo ou descendo? Como você pode comparar tudo isso? Eu gostaria de saber.

Coisas como essa realmente bagunçam a sua cabeça.

4. **Agora você precisa provar o limite matematicamente, mesmo que você já tenha resolvido na calculadora. Para fazer isso, você precisa fazer um sanduíche de limite (Enganei você – aposto que você pensava que o passo 3 era o último passo).**

A parte difícil sobre usar o método do sanduíche é produzir as funções dos "pães" (As funções ***f*** e ***h*** são o pão e a ***g*** é o salame). Não há uma maneira automática de fazer isso. Você tem que pensar sobre o formato da função do salame, e depois usar o seu conhecimento sobre funções e sua imaginação para produzir alguns bons prospectos para as funções dos pães.

Devido ao fato de a imagem da função seno ser do 1 negativo até o 1 positivo, toda vez que você multiplicar um número pelo seno de alguma coisa, o resultado ou fica à mesma distância de zero ou se aproxima de zero. Assim, $x \text{ sen } \frac{1}{x}$ nunca vai chegar acima de $|x|$ ou abaixo de $|-x|$. Então tente desenhar o gráfico das funções $f(x) = |x|$ e $h(x) = -|x|$ junto com $g(x)$ para ver se ***f*** e ***h*** são funções de pão adequadas para ***g***. A Figura 8-3 mostra que elas são.

Nós mostramos – apesar de talvez não ser a satisfação de um matemático, ***por Deus***! – que f(x) ≥ g(x) ≥ h(x). E devido ao fato de o $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$, se segue que $g(x)$ dever ter o mesmo limite: voilà – $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

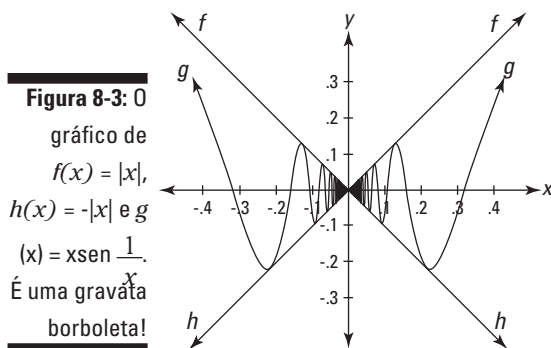



Figura 8-3: O gráfico de $f(x) = |x|$, $h(x) = -|x|$ e $g(x) = x\text{sen}\frac{1}{x}$. É uma gravata borboleta!

Avaliando Limites no Infinito

Nos tópicos anteriores, eu olhei os limites à medida que *x* se aproximava de um número finito, mas você também pode ter limites onde *x* se aproxima do infinito ou do infinito negativo. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e dê uma olhada no seu gráfico na Figura 8-4.

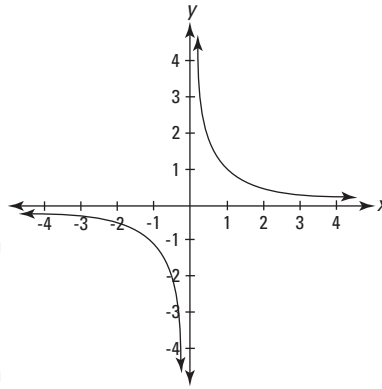



Figura 8-4: O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Você pode ver no gráfico que à medida que x aumenta cada vez mais – em outras palavras, à medida que x se aproxima do infinito – a altura da função fica cada vez menor, mas nunca chega à zero. Isso é confirmado considerando o que acontece quando você insere números cada vez maiores em $\frac{1}{x}$. Os outputs se tornam cada vez menores. Esse gráfico dessa forma tem uma assíntota horizontal de $y = 0$ (o eixo x), e nós dizemos que o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. O fato de x nunca realmente tocar o infinito e de f nunca chegar a zero não tem relevância. Quando nós dizemos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, queremos dizer que à medida que x fica cada vez maior sem fim, f se aproxima cada vez mais de zero – f tende à zero para sempre. A função f também se aproxima de zero à medida que x se aproxima do infinito negativo, o que é escrito como $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Limites no Infinito e Assíntotas Horizontais

Assíntotas horizontais e os limites no infinito sempre andam de mãos juntas.

Você não pode ter um sem o outro. Se você tem uma função racional como $f(x) = \frac{3x - 7}{2x + 8}$, determinar o limite no infinito ou no infinito negativo é o mesmo que encontrar o local da assíntota horizontal.

Aqui está o que você faz. Primeiro, preste atenção no grau do numerador (esse é a maior potência para x no numerador) e o grau do denominador. Agora, você tem três casos:

- Se o grau do numerador for maior do que o grau do denominador, por exemplo, $f(x) = \frac{6x^4 + x^3 - 7}{2x^2 + 8}$, não há uma assíntota horizontal e o limite da função à medida que x se aproxima do infinito (ou infinito negativo) não existe.
- Se o grau do denominador for maior do que o grau do numerador, por exemplo, $g(x) = \frac{4x^2 - 9}{x^3 + 12}$, o eixo x (isto é, a linha $y = 0$) é a assíntota horizontal e o $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.
- Se o grau do numerador e do denominador for igual, pegue o coeficiente da maior potência de x no numerador e divida pelo coeficiente da maior potência de x no denominador. Esse quociente dá a resposta para o problema sobre limite e para a altura da assíntota. Por exemplo, se $h(x) = \frac{4x^3 - 10x + 1}{5x^3 + 2x^2 - x}$, o $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \frac{4}{5}$ e h tem uma assíntota horizontal em $y = \frac{4}{5}$.

Para impressionar seus amigos, aponte o seu dedo indicador para cima, levante uma sobrancelha, e diga em tom profissional: "Em uma função racional onde o numerador e o denominador têm graus iguais, o limite da função à medida que x se aproxima do infinito ou do infinito negativo é igual ao quociente dos coeficientes dos termos principais."

A substituição não funciona para os problemas desse tópico. Se você tentar inserir ∞ no lugar de x em qualquer uma das funções racionais nesse tópico, você obtém $\frac{\infty}{\infty}$, mas isso ***não*** é igual a 1. Um resultado de $\frac{\infty}{\infty}$ não te diz nada sobre a resposta para um problema sobre limite.

Resolvendo problemas no infinito com uma calculadora

Aqui está um problema que não pode ser feito pelo método do tópico anterior porque não é uma função racional: $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$. Mas é muito fácil com uma calculadora. Digite a função no modo de gráficos, depois vá para *table setup* e configure *TblStart* para 100.000 e *ΔTbl* para 100.000. A Tabela 8-4 mostra os resultados.

Tabela 8-4 **Tabela de Valores para $y = (\sqrt{x^2 + x} - x)$**

x	y
100.000	,4999988
200.000	,4999994
300.000	,4999996
400.000	,4999997
500.000	,4999998
600.000	,4999998
700.000	,4999998
800.000	,4999998
900.000	,4999999

Você pode ver que y está chegando bem perto de 0,5 à medida que x fica cada vez maior. Então 0,5 é o limite da função à medida que x se aproxima do infinito, e há uma assíntota horizontal em $y = 0,5$. Se você tem alguma dúvida sobre o limite ser igual a 0,5, volte para ***table setup*** e insira um número extremamente grande para *TblStart* e para *ΔTbl*, digamos, 1.000.000.000, e verifique os resultados da tabela de novo. Tudo que você vê é uma coluna de 0,5s. Esse é o limite (A propósito, ao contrário das duas funções racionais nos tópicos anteriores, o limite dessa função à medida que x se aproxima do infinito negativo não é igual ao limite à medida que x se aproxima do infinito: $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \infty$ porque quando você coloca $-\infty$ você tem $\infty + \infty$ que é igual a ∞). Mais uma coisa: Assim como com limites regulares, usar uma calculadora para limites infinitos não lhe dá uma resposta exata a não ser que os números na tabela estejam se aproximando de um número que você reconheça como, por exemplo, 0,5.

A substituição não funciona no problema acima, $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$. Se você coloca ∞ no lugar de x, você obtém $\infty - \infty$ que ***não*** é igual a zero. Um resultado de $\infty - \infty$ não diz nada sobre a resposta para um problema sobre limite.

Usando a álgebra para limites no infinito

Agora tente um pouco de álgebra para o problema $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$. Você obteve a resposta com a calculadora, mas em igualdade de circunstâncias, é melhor resolver o problema algebricamente porque assim você tem uma resposta matemática incontestável. A resposta da calculadora nesse caso é ***bem*** convincente, mas não é matematicamente rigorosa, então se você parar aqui, a polícia da matemática pode te pegar.

1. Tente a substituição – sempre uma boa idéia.

Nada bom. Você obtém $\infty - \infty$, que não te diz nada – veja o ícone "Atenção!" no tópico anterior. Vá para o plano B.

Devido ao fato de $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ conter uma raiz quadrada, o método da multiplicação conjugada seria uma opção natural, exceto pelo fato desse método ser usado para funções fracionárias. Bem, apenas coloque $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ sobre o número 1 e, voilà, você tem uma fração: $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}$. Agora faça a multiplicação conjugada.

2. Multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado de $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ e simplifique.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\quad\text{(Fatore } x \text{ para fora do denominador)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

3. Agora a substituição funciona.

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$$

(Lembre-se que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ no tópico "Limites para memorizar)

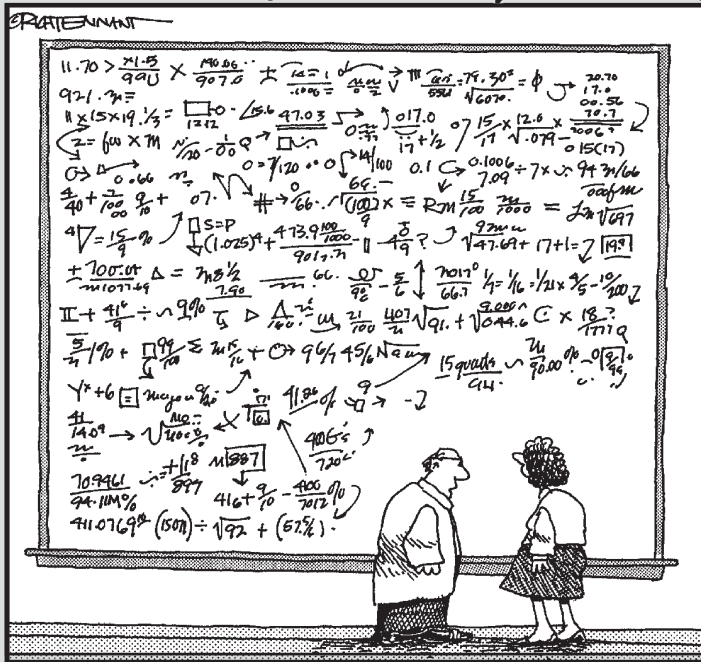
$$=\frac{1}{1+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

Assim, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}$, que confirma a resposta da calculadora.

Parte IV

Diferenciação

A 5ª onda Por Rich Tennant

"O QUE NÓS ESTAMOS REALMENTE DIZENDO AQUI?"

Nesta parte...

A diferenciação é a primeira das duas grandes ideias do cálculo; a integração (que será discutida na Parte V) é a segunda. A diferenciação e a integração constituem a essência do currículo do cálculo. A diferenciação é o processo para descobrir a derivada, e a derivada é apenas uma razão como milhas por hora ou dólares por item. No gráfico da curva, a derivada diz a você a inclinação da curva.

Capítulo 9

Orientação da Diferenciação

Neste Capítulo

- Descobrindo a álgebra básica por trás do cálculo
- Entendendo os símbolos estranhos do cálculo
- Fazendo a diferenciação com Laurel e Hardy
- Encontrando as derivadas de equações lineares e quadráticas
- Lidando com problemas sobre tangente e o quociente da diferença

Cálculo diferencial é a matemática da *mudança* e a matemática do *infinitesimal*. Você talvez diga que é a matemática das mudanças infinitesimais – mudanças que ocorrem a cada milésimo de segundo.

Sem o cálculo diferencial – se você tem somente a álgebra, a geometria e a trigonometria – você está limitado à matemática das coisas que mudam ou não, ou que mudam ou se movem à uma razão *constante*. Lembra-se daqueles problemas da álgebra? O trem sai da estação indo para o norte a 90km/h, você dirige para o leste a 80km/h... Você pode lidar com esse tipo de problema com a álgebra porque as velocidades ou razões são constantes. Nosso mundo, no entanto, não é uma das razões constantes – as razões estão em fluxo constante.

Pense sobre colocar um homem na lua. Apollo 11 decolou de uma plataforma de lançamento *móvel* (a terra está tanto rodando em torno do seu eixo como girando ao redor do sol). À medida que o Apollo subia cada vez mais alto, o atrito provocado pela atmosfera e o efeito da gravidade da terra estavam mudando não apenas a todo segundo, não apenas a cada milionésimo de segundo, mas a cada fração infinitesimal de segundo. O peso da nave espacial também estava constantemente mudando à medida que queimava combustível. Todas essas coisas influenciaram a mudança de velocidade do foguete. E além disso, o foguete tinha que atingir um alvo *móvel*, a lua. Todas essas coisas estavam mudando, e suas razões de mudança estavam mudando. Digamos que o foguete estava a uma velocidade de 2000km/h em um segundo e a 2020km/h um segundo depois – durante esse segundo, a velocidade do foguete passou literalmente através do número infinito de velocidades diferentes entre 2000 e 2020km/h. Como fazer as contas para essas coisas efêmeras que mudam a cada parte *infinitesimal* de segundo? Você não pode fazer isso sem a diferenciação.

O cálculo diferencial é também usado para todo tipo de coisa terrestre. Grande parte da teoria da economia moderna seria impossível sem a diferenciação. Em economia, tudo está em um fluxo constante. Preços

sobem e descem, suprimentos e demanda flutuam, e a inflação está constantemente mudando. Essas coisas estão constantemente mudando, e as maneiras que elas afetam cada um estão constantemente mudando. Você precisa do cálculo para isso.

O cálculo diferencial é uma das invenções mais práticas e poderosas na história da matemática. Então, vamos começar logo.

Fazendo a Diferenciação: É Somente Encontrar a Inclinação

A diferenciação é a primeira das duas maiores ideias em cálculo – a outra é a integração, que eu abordo na Parte V. A diferenciação é o processo de encontrar a derivada de uma função do tipo $y = x^2$. A ***derivada*** é apenas um termo sofisticado do cálculo para uma simples idéia que você sabe da álgebra – a inclinação. A ***inclinação***, como você sabe, é o termo sofisticado da álgebra para declive. E ***declive*** é a palavra sofisticada para... Não! Declive é a palavra usual que você conhece desde criança, como em, "Ei, essa rua é realmente íngreme". Tudo que você estuda em cálculo diferencial é relacionado à simples idéia de declive.

No cálculo *diferencial*, você estuda a *diferenciação*, que é o processo de *derivar* – isto é, encontrar – *derivadas*. Essas são grandes palavras para uma simples ideia: Encontrar a *inclinação* de uma reta ou de uma curva. Use alguns desses termos para impressionar os seus amigos. A propósito, a raiz das palavras *diferencial* e *diferenciação* é *diferença* – eu explico a conexão no final desse capítulo no tópico sobre o *quociente da diferença*.

Considere a Figura 9-1. Uma inclinação de ½ significa que à medida que o homem palito anda um metro para a direita, ele some ½ metro; onde a inclinação for 3, ele sobe 3 metros à medida que anda 1 metro para a direita. Onde a inclinação for zero, ele está no topo, nem subindo e nem descendo; e onde a inclinação for negativa, ele está descendo. Uma inclinação de -2, por exemplo, significa que ele ***desce*** 2 metros para cada metro para a direita. Isso é mostrado com mais precisão na Figura 9-2.

Para lembrar que subir e descer para a direita (ou para cima à esquerda) é uma inclinação ***negativa***, imagine um "N" maiúsculo como mostrado na Figura 9-3.

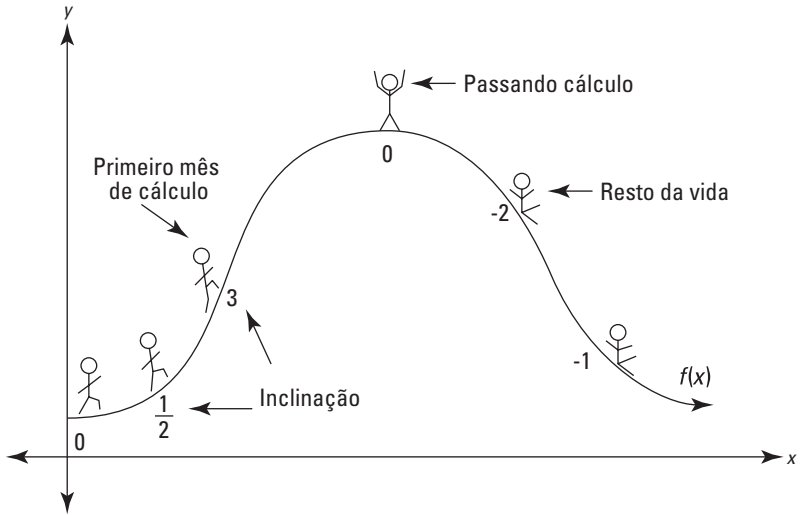
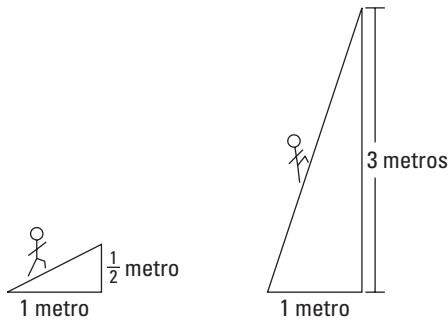



Figura 9-1: Fazer a diferenciação apenas significa encontrar a inclinação.

Português:	declive = $\frac{1}{2}$	declive = 3
Álgebra:	inclinação = $\frac{1}{2}$	inclinação = 3
Cálculo:	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$	$\frac{dy}{dx} = 3$

($\frac{dy}{dx}$, lido como /dê y, dê x/, é um dos muitos símbolos para a derivada – veja o texto complementar).

Figura 9-2: A derivada = inclinação = declive

Figura 9-3: Esse N tem uma inclinação negativa.

Variedade é o que torna a vida mais excitante

Todo mundo sabe que $3^2 = 9$. Agora, não seria estranho se da próxima vez que você lesse esse fato matemático, ele fosse escrito como ${}^{2}3 = 9$ ou $3_2 = 9$? Como $\overset{2}{3} = 9$ te chama a atenção? Ou $\underset{2}{3} = 9$? Variedade *não* é o que torna a matemática excitante. Quando os matemáticos decidem por uma maneira de expressar uma ideia, eles a mantêm — exceto, isto é, com cálculo. Você está pronto? Não perca as estribeiras. Tudo o que se segue são diferentes símbolos para a derivada — todos eles significam exatamente a mesma coisa: $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{dy(x)}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f'(x)$ ou y' ou f ou y ou $D_x f$ ou $D_x y$ ou $D_x f(x)$. Existem mais. Agora, você tem duas alternativas: 1) Bater sua cabeça na parede tentando entender coisas como essa quando algum autor usa um símbolo uma vez e um diferente símbolo outra vez, e o que exatamente o d e f significam de qualquer maneira, e assim por diante, e etc., ou 2) Não tente entender isso; apenas trate esses diferentes símbolos como palavras em idiomas diferentes para a mesma ideia — em outras palavras, não se preocupe. Eu recomendo fortemente a última opção.

Não fique no meio da legião de estudantes que confundem as inclinações das linhas verticais e horizontais. Qual a inclinação de uma estrada plana e horizontal? Nem um pouco inclinada, é claro. Inclinação zero. Então, uma linha horizontal tem uma inclinação igual à *zero*. Como é dirigir em uma estrada vertical? Você não consegue fazer isso. E você não pode obter a inclinação de uma linha vertical – ela não existe, ou, como os matemáticos dizem, é *indefinida*.

A inclinação de uma reta

Continue com a ideia da inclinação – a esta altura você já deve saber que a inclinação é do que se trata a diferenciação. Dê uma olhada no gráfico da reta, $y = 2x + 3$, na Figura 9-4.

Você se lembra da álgebra – eu estou *totalmente confiante* sobre isso – que você pode encontrar pontos nessa reta inserindo números no lugar de x e calculando y: coloque 1 no lugar de x e y é igual a 5, o que lhe dá um ponto localizado em (1,5); coloque 4 no lugar de x e y vai ser igual a 11, te dando o ponto (4,11), e assim por diante.

Eu tenho certeza que você também se lembra como calcular a inclinação dessa reta. Eu percebo que nenhum cálculo é necessário aqui – você sobe 2 à medida que passa por 1, então a inclinação é automaticamente 2. Você também pode simplesmente notar que $y = 2x + 3$ está na forma inclinação-intercepta ($y = mx + b$) e que, desde que $m = 2$, a inclinação é 2 (Veja o Capítulo 5 se você quiser revisar $y = mx + b$). Mas fique firme comigo porque você precisa do que se segue. Primeiro, lembre-se que:

LEMBRE-SE

$$inclinação = \frac{aumento}{distância}$$

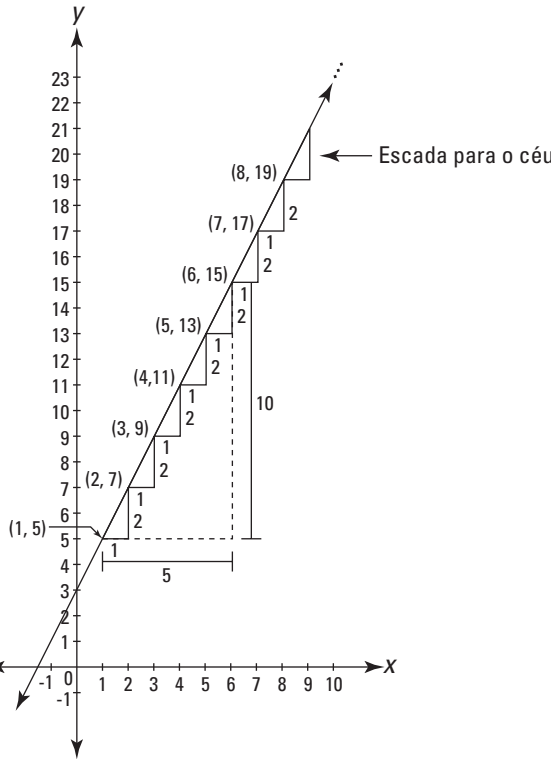



Figura 9-4: O gráfico de y = 2x + 3.

O ***aumento*** é a distância que você sobe (a parte vertical de um degrau da escada), e a ***distância*** é o espaço que você passa através (a parte horizontal do degrau da escada). Agora, pegue quaisquer dois pontos na reta, digamos, (1,5) e (6,15), e descubra o aumento e a distância. Você aumenta em 10 a partir de (1,5) para (6,15) porque 5 mais 10 é igual a 15 (ou você pode dizer que 15 menos 5 é igual a 10). E você encontra 5 a partir de (1,5) até (6,15) porque 1 mais 5 é igual a 6 (ou em outras palavras, 6 menos 1 é igual a 5). Depois, você divide para ter a inclinação.

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{aumento}{distância} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aqui está como você faz o mesmo problema usando a fórmula da inclinação:

$$inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Insira os pontos (1,5) e (6,15):

$$inclinação = \frac{15-5}{6-1} = \frac{10}{5} = 2$$

Ok, vamos resumir o que sabemos sobre essa reta. A Tabela 9-1 mostra seis pontos na reta e a inclinação imutável de 2.

Tabela 9-1 Pontos na Reta Y = 2X + 3 e a Inclinação Nesses Pontos

x (posição horizontal)	1	2	3	4	5	6	etc.
y (altura)	5	7	9	11	13	15	etc.
inclinação	2	2	2	2	2	2	etc.

A derivada de uma reta

O tópico anterior mostrou a você a álgebra da inclinação. Agora, aqui está o cálculo. A derivada (da inclinação) da reta na Figura 9-4 é sempre 2, então você escreve:

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

(Lê-se: *d y, d x igual a* 2)

Outra forma comum de escrever a mesma coisa é

$$y' = 2$$

(Lê-se *y linha é igual a* 2)

E você diz,

A derivada da função, $y = 2x + 3$, é 2.

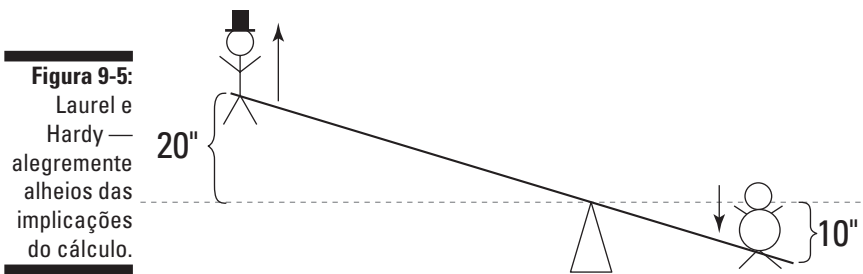
(Lê-se *a derivada da função*, $y = 2x + 3$, é 2. Isso é uma piada.)

A Derivada: É Apenas uma Razão

Aqui está outra maneira de entender a ideia de uma derivada que é mais fundamental do que o conceito de inclinação: a derivada é uma *razão*. Então por que eu comecei o capítulo com a *inclinação*? Porque a inclinação é em alguns aspectos o mais fácil dos dois conceitos, e a inclinação é a idéia para a qual você volta muitas vezes nesse livro e em qualquer livro de cálculo à medida que você olha para o gráfico de dúzias e dúzias de funções. Mas antes de você ter uma inclinação, você tem uma razão. Uma inclinação é, de certa forma, uma imagem da razão; a razão vem primeiro, a imagem dela vem em segundo. Assim como você pode ter uma função antes de ver o seu gráfico, você pode ter uma razão antes de vê-la como inclinação.

Cálculo no parque infantil

Imagine Laurel e Hardy em uma gangorra – dê uma olhada na Figura 9-5.

Figura 9-5: Laurel e Hardy — alegremente alheios das implicações do cálculo.

Supondo que Hardy pese duas vezes mais do que Laurel, Hardy tem que sentar duas vezes mais perto do centro do que Laurel para que eles se equilibrem. E para cada centímetro que Hardy desce, Laurel sobe dois centímetros. Então Laurel se move duas vezes mais do que Hardy. Voilà, você tem uma derivada!

A *derivada* é simplesmente a medida de quanto uma coisa muda comparada com outra – e isso é uma *razão*.

Laurel se move duas vezes mais do que Hardy, então com os símbolos do cálculo você escreve:

$$dL = 2dH$$

Vagamente falando, dL pode ser pensado como sendo a mudança na posição de Laurel e dH como sendo a mudança na posição de Hardy. Você pode ver que se Hardy descer 10 centímetros então dH é 10, e devido ao

fato de *dL* ser igual a 2 vezes *dH*, *dL* é igual a 20 – então Laurel sobe em 20 centímetros. Dividindo ambos os lados dessa equação por *dH*, você tem

$$\frac{dL}{dH} = 2$$

E essa é a derivada de Laurel em relação à Hardy (É lida como, "*d L, d H*", ou como, "a derivada de *L* em relação a *H*"). O fato de $\frac{dL}{dH} = 2$ simplesmente significa que Laurel está se movendo 2 vezes mais do que Hardy. A *razão* de movimento de Laurel é de 2 *centímetros por centímetro* do movimento de Hardy.

Agora vamos olhar para isso do ponto de vista de Hardy. Hardy se move a metade de Laurel, então você também pode escrever:

$$dH = \frac{1}{2}\,dL$$

Dividindo por *dL*, você tem

$$\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$$

Essa é a derivada de Hardy em relação a Laurel, e isso significa, é claro, que Hardy move $\frac{1}{2}$ centímetro para cada centímetro que Laurel se move. Assim, a razão de Hardy é $\frac{1}{2}$ *centímetro por centímetro* de movimento de Laurel. A propósito, você também pode obter essa derivada usando $\frac{dL}{dH} = 2$, que é o mesmo que $\frac{dL}{dH} = \frac{2}{1}$, e colocando de cabeça pra baixo você obtém $\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$.

Essas razões de 2 *centímetros por centímetro* e $\frac{1}{2}$ *centímetro por centímetro* podem parecer um pouco estranhas porque nós normalmente pensamos em razões como se referindo a algo por unidade de tempo, como *quilômetros por hora*. Mas uma razão pode ser *qualquer coisa por qualquer coisa*. Então, toda vez que você tiver *isso por aquilo*, você tem uma razão; e se você tem uma razão, você tem uma derivada.

Velocidade – a razão mais familiar

Falando em *quilômetros por hora*, digamos que você esteja dirigindo a uma velocidade constante de 60 *quilômetros por hora*. Essa é a *razão* do seu carro, e 60 *quilômetros por hora* é a derivada da posição do seu carro (*p*) em relação ao tempo (*t*). Com os símbolos do cálculo, você escreve:

$$\frac{dp}{dt} = 60\,\frac{quilômetros}{hora}$$

Isso diz a você que a posição do seu carro muda a cada 60 quilômetros para cada hora que o tempo muda. Ou você pode dizer que a posição

do seu carro (em quilômetros) muda 60 vezes até que o tempo mude uma vez (em horas). Novamente, a derivada apenas diz a você quanto uma coisa muda comparada à outra.

E assim como o exemplo de Laurel e Hardy, essa derivada, como todas as derivadas, pode ser colocada de cabeça para baixo:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{60} \frac{horas}{quilômetro}$$

A razão ***horas por quilômetro*** é muito menos familiar do que a razão ***quilômetros por hora***, mas é uma razão válida mesmo assim. Ela diz a você que para cada quilômetro que você anda, o tempo muda em $\frac{1}{60}$ da hora, que é um minuto. Ou seja, a cada quilômetro de estrada que é percorrido, é um minuto que passa.

Não há fim para as diferentes razões que você talvez veja: ***quilômetros por galão*** (para o consumo de combustível), ***litros por minuto*** (para a torneira mal fechada), ***produção por funcionário*** (para a produtividade de uma fábrica), e etc. Razões podem ser constantes ou mutáveis. Em qualquer caso, toda razão é uma derivada, e toda derivada é uma razão.

A correlação razão – inclinação

Razões e inclinações têm uma correlação simples. Todos os exemplos anteriores sobre razão podem ser desenhados em um sistema de coordenadas *x-y*, onde cada razão aparece como uma inclinação. Considere novamente o exemplo de Laurel e Hardy. Laurel se move duas vezes mais do que Hardy. Isso pode ser representado pela seguinte equação:

$$L = 2H$$

A Figura 9-6 mostra o gráfico dessa função.

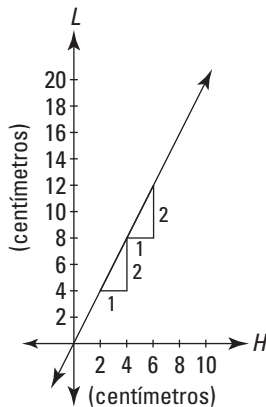



Figura 9-6: O gráfico de L = 2H.

Os centímetros no eixo *H* indicam a distância que Hardy se moveu para cima ou para baixo a partir da posição inicial da gangorra; os centímetros

no eixo *L* mostram a distância que Laurel se moveu para cima ou para baixo. A reta sobe 2 centímetros para cada centímetro que vai para a direita, e assim sua inclinação é $\frac{2}{1}$, ou 2. Essa é a representação visual de $\frac{dL}{dH} = 2$, e mostra que a posição de Laurel muda 2 vezes mais que a de Hardy.

Um último comentário antes de seguirmos em frente. Você sabe que a $inclinação = \frac{aumento}{distância}$. Bem, você pode pensar em ***dL*** como o ***aumento*** e *dH* como a ***distância***. Isso amarra tudo junto muito bem.

$$inclinação = \frac{aumento}{distância} = \frac{dL}{dH} = razão$$

Lembre-se, uma derivada é apenas uma inclinação, e a derivada é apenas uma razão.

A Derivada de uma Curva

O tópico anterior nesse capítulo envolveu funções *lineares* – linhas retas com inclinações *constantes*. Mas se todas as funções e gráficos fossem retas com inclinações constantes, não haveria necessidade para o cálculo. A derivada da função de Laurel e Hardy desenhada no gráfico acima é 2, mas você não precisa do cálculo para determinar a inclinação de uma reta. Cálculo é a matemática da mudança, então agora é uma boa hora para irmos para as *parábolas*, curvas com inclinações *variáveis*. A Figura 9-7 é o gráfico da parábola, $y = \frac{1}{4}, x^2$.

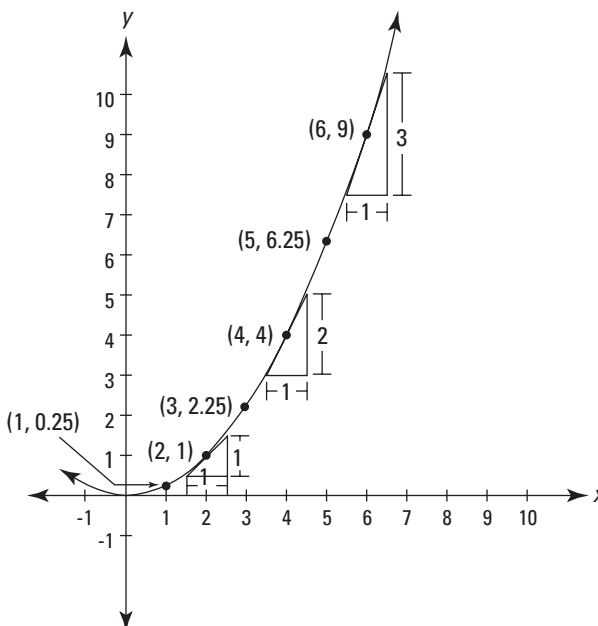



Figura 9-7: O gráfico de $y = \frac{1}{4}, x^2$.

Note como a parábola fica cada vez mais inclinada à medida que vai para a direita. Você pode ver a partir do gráfico que no ponto (2,1), a inclinação é igual a 1; em (4,4), a inclinação é igual a 2; em (6,9), a inclinação é igual a 3, e assim por diante. No fim das contas, a derivada dessa função é igual a $\frac{1}{2}x$ (eu mostro a você como cheguei a isso em um minuto). Para encontrar a inclinação da curva em qualquer ponto, você apenas insere a coordenada x do ponto na derivada, $\frac{1}{2}x$, e você tem a inclinação. Por exemplo, se você quiser a inclinação no ponto (3, 2.25), coloque 3 no lugar de x, e a inclinação será $\frac{1}{2}$ vezes 3, ou 1,5. A Tabela 9-2 mostra alguns pontos na parábola e a inclinação nesses pontos.

Tabela 9-2 Pontos na Parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ e as Inclinações Nesses Pontos

x (posição horizontal)	1	2	3	4	5	6	etc.
y (altura)	0.25	1	2,25	4	6,25	9	etc.
$\frac{1}{2}x$ (inclinação)	0.5	1	1,5	2	2.5	3	etc.

Aqui está o cálculo. Você escreve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \text{ ou } y' = \frac{1}{2}x$$

E você diz,

A derivada da função $y = \frac{1}{4}x^2$ é $\frac{1}{2}x$.

Ou você pode dizer,

A derivada de $\frac{1}{4}x^2$ é $\frac{1}{2}x$.

Agora, eu prometo dizer a você como *fazer* essa derivada de $y = \frac{1}{4}x^2$.

1. **Pegue a potência e coloque na frente do coeficiente[1].**

   $$2 . = \frac{1}{4}x^{2}$$

2. **Multiplique.**

   2 vezes $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$ então isso lhe dá $\frac{1}{2}x^2$.

3. Reduza a potência em 1.

$$\frac{1}{2}x^1 \text{ ou apenas } \frac{1}{2}x.$$

Essa e muitas outras técnicas de diferenciação serão discutidas no Capítulo 10.

O Quociente da Diferença

Soem as trombetas! Você chega agora ao que talvez seja a pedra fundamental do cálculo diferencial: o quociente da diferença, a ponte entre limites e a derivada. Eu continuo repetindo – você notou? – O importante fato de a derivada ser apenas uma inclinação. Você aprendeu como encontrar a inclinação de uma reta em álgebra. Na Figura 9-7, eu dei a inclinação da parábola em diversos pontos, e depois eu mostrei o método do atalho para encontrar a derivada – porém eu deixei de fora a matemática importante no meio. Essa matemática envolve limites, e nos leva para o limiar do cálculo. Não perca a calma.

A *inclinação* é definida como $\frac{aumento}{distância}$, e

$$inclinação = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para calcular a inclinação, você precisa de dois pontos para inserir na fórmula. Para uma reta, isso é fácil. Você apenas escolhe quaisquer dois pontos na reta e os insere. Mas digamos que você queira a inclinação da parábola abaixo no ponto (2,4) como mostrado na Figura 9-8.

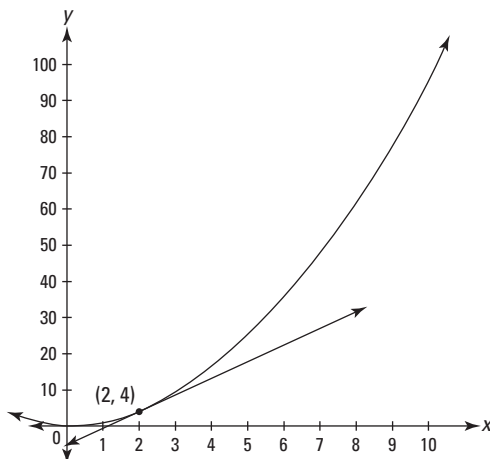



Figura 9-8: O gráfico de $y = x^2$ com uma reta tangente em (2,4).

Você pode ver a reta desenhada tangente à curva em (2,4), e devido ao fato de a inclinação da reta tangente ser igual à inclinação da parábola em (2,4), tudo o que você precisa é a inclinação da reta tangente. Mas você não sabe a equação da reta tangente, então você não pode pegar o segundo ponto – em adição a (2,4) – que você precisa para a fórmula da inclinação.

Aqui está como os inventores do cálculo contornaram essa barreira. A Figura 9-9 mostra a reta tangente novamente e uma reta secante interceptando a parábola em (2,4) e em (10,100).

Uma *reta secante* é uma linha que intercepta a curva em dois pontos. Isso é um pouco simplificado demais, mas vai servir.

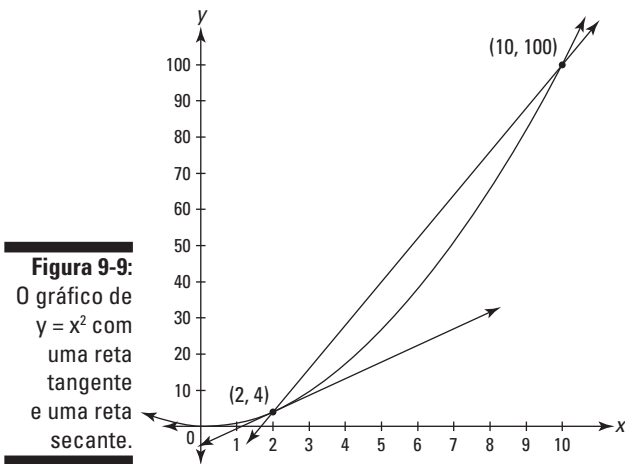



Figura 9-9: O gráfico de $y = x^2$ com uma reta tangente e uma reta secante.

A inclinação dessa reta secante é dada pela fórmula da inclinação:

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{aumento}{distância} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{100 - 4}{10 - 2} \\ &= \frac{96}{8} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Você pode ver que essa reta secante é mais inclinada do que a reta tangente, e assim a inclinação da secante, 12, é maior do que a inclinação que você está procurando.

Agora adicione mais um ponto em (6,36) e desenhe outra secante usando esse ponto e (2,4) novamente. Veja a Figura 9-10.

Calcule a inclinação dessa segunda secante:

$$\begin{aligned} inclinação &= \frac{36-4}{6-2} \\ &= \frac{32}{4} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Você pode ver que essa reta secante é uma melhor aproximação da reta tangente do que a primeira secante.

Agora, imagine o que aconteceria se você pegasse o ponto em (6,36) e o deslizasse parábola abaixo em direção a (2,4), arrastando a reta secante ao longo com ele. Você consegue ver que à medida que o ponto se aproxima cada vez mais de (2,4), a reta secante se aproxima mais e mais da reta tangente, e que a inclinação dessa secante se aproxima cada vez mais da inclinação da tangente?

Então, você pode pegar a inclinação da tangente se você pegar o *limite* da inclinação dessa secante móvel. Vamos dar aos pontos móveis as coordenadas (x_2, y_2). À medida que esse ponto (x_2, y_2) se aproxima cada vez mais de (x_1, y_1), a saber, (2,4), a distância – isto é $(x_2 - x_1)$ – se aproxima cada vez mais do zero. Então aqui está o limite que você precisa:

$$\begin{aligned} \text{Inclinação}_{\text{da tangente}} &= \underset{\substack{\text{à medida que o ponto} \\ \text{desliza em direção a (2,4)}}}{\text{limite}} (\text{inclinação}_{\text{da secante móvel}}) \\ &= \lim_{distância \to 0} \frac{aumento}{distância} \\ &= \lim_{distância \to 0} \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} \\ &= \lim_{distância \to 0} \frac{y^2 - 4}{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Veja o que acontece a esse limite quando você insere mais três pontos na parábola que estão cada vez mais perto de (2,4):

Quando o ponto (x_2, y_2) desliza para (2.1, 4.41), a inclinação é 4,1.

Quando o ponto desliza para (2.01, 4.0401), a inclinação é 4,01.

Quando o ponto desliza para (2.001, 4.004001), a inclinação é 4,001.

É claro que parece que a inclinação está caminhando em direção a 4.

Assim como todos os problemas sobre limite, a variável nesse problema, a ***distância***, ***se aproxima***, mas nunca realmente chega à zero. Se chegasse a zero – o que aconteceria se você deslizasse o ponto que você pegou ao longo da parábola até que ele realmente ficasse no topo de (2,4) – você teria

uma inclinação de $\frac{0}{0}$, que é indefinida. Mas, é claro, essa é precisamente a inclinação que você quer – a inclinação da reta quando o ponto pousa no topo de (2,4). É nesse fato que está situado a beleza do processo do limite. Com esse limite, você obtém a inclinação *exata* da reta *tangente* mesmo que a função limite, $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$, gere inclinações de retas *secantes*.

Aqui está, de novo, a equação para a inclinação de uma reta tangente:

$$\textit{inclinação} = = \lim_{\textit{distância} \to 0} \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$$

E a inclinação da reta tangente é – você adivinhou – a derivada.

A *derivada* de uma função *f(x)* em algum número $x = c$, escrito como $f'(c)$, é a inclinação da reta tangente à *f* desenhada em *c*.

A fração da inclinação $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$ é expressa com a terminologia da álgebra. Agora vamos reescrever para dar aquele toque pomposo do cálculo. Mas primeiro, a definição:

Existe um termo sofisticado do cálculo para a fração geral da inclinação, $\frac{\textit{aumento}}{\textit{distância}}$ ou $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. A fração é um *quociente*, certo? E tanto $y_2 - y_1$ como $x_2 - x_1$ são *diferenças*, certo? Então, voilà, é chamada de ***quociente da diferença***.

Ok, aqui está a maneira mais comum de escrever o quociente da diferença (você talvez se depare com outras maneiras equivalentes). Primeiro, a *distância*, $x_2 - x_1$ (nesse exemplo, $x_2 - 2$), é chamada – não me pergunte o porquê – *h*. Depois, devido ao fato de $x_1 = 2$ e a *distância* ser igual a h, x_2 é igual a $2 + h$. Você então escreve y_1 como $f(2)$ e y_2 como $f(2 + h)$. Fazendo todas as substituições, você tem a definição da derivada de x^2 em $x = 2$ como o limite do quociente da diferença:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ é apenas o contraído $\frac{\textit{aumento}}{\textit{distância}}$ degrau da escada que você pode ver na Figura 9-10 à medida que o ponto desliza parábola abaixo em direção ao ponto (2,4). Dê uma olhada na Figura 9-11.

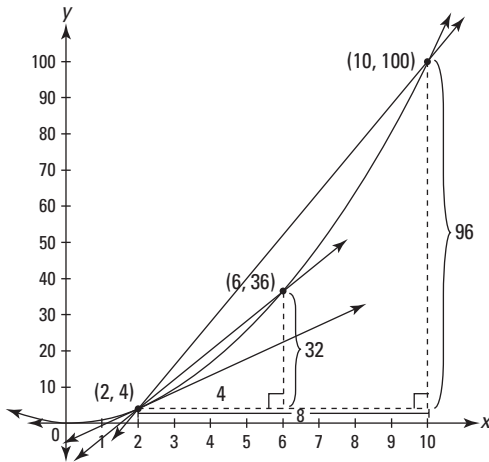



Figura 9-10: O gráfico de $y = x^2$ com a reta tangente e duas retas secantes.

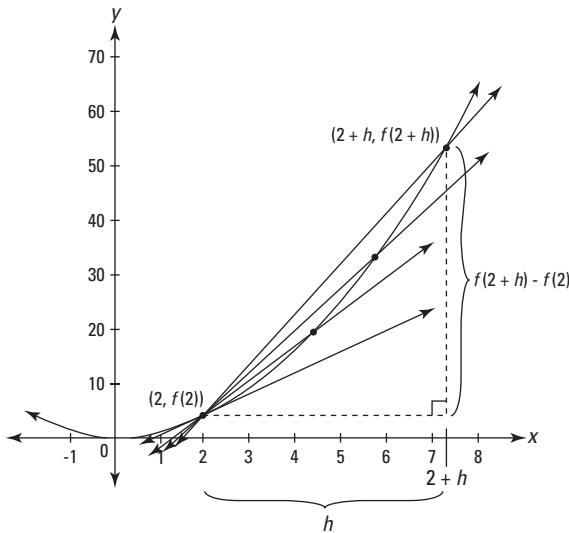



Figura 9-11: O gráfico de $y = x^2$ mostrando como o limite produz a inclinação da reta tangente em (2,4).

Fazendo as contas você tem, pelo menos, a inclinação da reta tangente em (2,4):

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$$

$$= 4 + 0$$

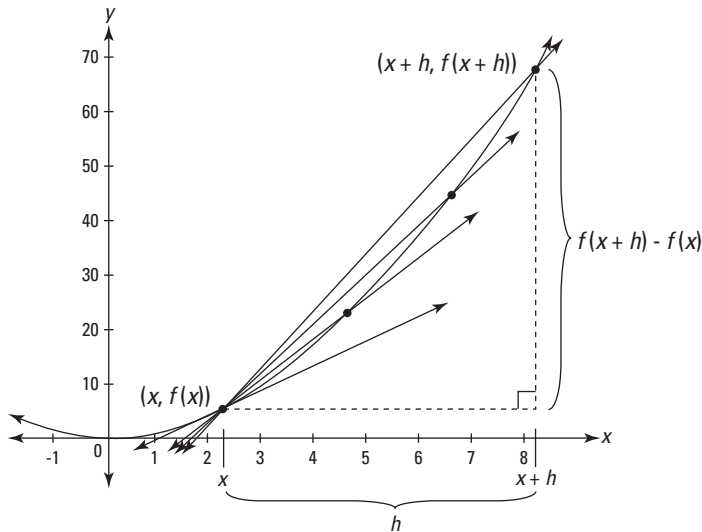
$$= 4$$

Então a inclinação é 4 (A propósito, é uma coincidência absurda que a inclinação em (2,4) seja igual a coordenada y do ponto).

Definição da derivada: Se você substitui o ponto $(2, f(2))$ na equação do limite acima pelo ponto geral $(x, f(x))$, você tem uma definição geral da derivada como uma função de x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A Figura 9-12 mostra essa definição geral graficamente. Note que a Figura 9-12 é virtualmente idêntica à Figura 9-11 exceto pelo fato de os xs substiturem os 2s na Figura 9-11 e que o ponto móvel na Figura 9-12 desliza para baixo em direção a qualquer ponto antigo $(x, f(x))$ em vez de em direção ao ponto $(2, f(2))$.

Figura 9-12: O gráfico de $y = x^2$ mostrando como o limite produz uma inclinação da reta da tangente no ponto geral $(x, f(x))$.

Agora calcule esse limite e obtenha a derivada para a parábola $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

Assim, para essa parábola, a derivada, isto é, a inclinação da reta tangente, é igual a $2x$. Insira qualquer número no lugar de x e você irá obter a inclinação da parábola naquele valor x! Tente.

Razão Média e Instantânea

Retornando mais uma vez para a correlação entre inclinações e razões, a inclinação é apenas a descrição visual da razão: a inclinação, $\frac{aumento}{distância}$, apenas diz a você a razão na qual y muda quando comparado com x. Se, por exemplo, y for o número de quilômetros e x o número de horas, você obterá uma razão familiar de *quilômetro por hora*.

Cada reta secante nas Figuras 9-9 e 9-10 têm uma inclinação dada pela fórmula $\frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$. Essa inclinação é a razão *média* no intervalo de x_1 até x_2. Se y estiver em quilômetro e x em horas, você obterá uma velocidade *média* em *quilômetros por hora* durante o intervalo de tempo de x_1 até x_2.

Quando você pega o limite e obtém a inclinação da reta tangente, você obtém a razão *instantânea* no ponto (x_1, y_1). Novamente, se y está em quilômetros e x em horas, você tem uma velocidade *instantânea* no ponto no tempo, x_1. Devido ao fato de a inclinação da reta tangente ser a derivada, isto nos dá outra definição da derivada.

A *derivada* de uma função *f(x)* em algum valor de x é a razão *instantânea* da mudança de *f* em relação à x naquele valor.

Ser ou Não Ser? Três Casos Onde a Derivada Não Existe

Eu quero discutir as três situações onde a derivada não existe. A esta altura você certamente sabe que a derivada da função em um dado ponto é a inclinação da reta tangente nesse ponto. Então, se você não pode desenhar a reta tangente, não há derivada – isso acontece nos dois primeiros casos. No terceiro caso, há uma reta tangente, mas sua inclinação e a derivada são indefinidas.

- Não há uma reta tangente e assim não há derivada em nenhum tipo de ***descontinuidade***: infinita, removível, ou pulos (Esses tipos de descontinuidade foram discutidos e ilustrados no Capítulo 7). A continuidade é, então, uma condição ***necessária*** para derivada. Não é, no entanto, uma condição ***suficiente*** como os dois casos a seguir mostram. Entenda essa linguagem dos logicistas.
- Não há uma reta tangente e assim não há derivada no vértice em uma função. Veja a função ***f*** na Figura 9-13.
- Onde a função tem um ***ponto de inflexão vertical***, a inclinação é indefinida e assim a derivada não existe. Veja a função ***g*** na Figura 9-13 (Pontos de inflexão serão explicados no Capítulo 11).

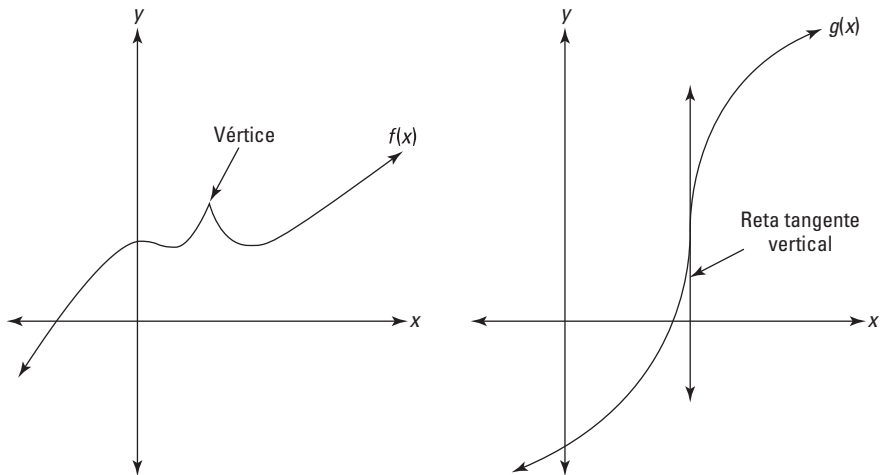



Figura 9-13: Os casos II e III onde não há derivada.

Capítulo 10

Regras da Diferenciação – Sim, Cara, Elas Mandam

Neste Capítulo

- Aprendendo as regras quer você goste ou não – desculpa amigo, mas essas são as regras
- Dominando as regras básicas da diferenciação
- Graduando em regras para especialistas
- Entendendo a diferenciação implícita
- Usando logaritmos em diferenciação
- Fazendo a diferenciação de funções inversas
- Encontrando as segundas e terceiras derivadas

O Capítulo 9 dá a você a ideia básica do que é uma derivada – é apenas uma razão como a velocidade e é simplesmente a inclinação de uma função. É importante que você tenha uma compreensão sólida e intuitiva dessas ideias fundamentais.

Você também sabe agora a base matemática da derivada e sua definição técnica envolvendo o limite do quociente da diferença. Agora, eu vou ser banido para sempre da Ordem Real de Pitágoras por dizer isso, mas, para ser perfeitamente franco, você pode basicamente esquecer esse negócio sobre limite – exceto que você precisa saber disso para sua prova final – porque neste capítulo eu dou técnicas de atalho para encontrar derivadas e evitar as dificuldades dos limites e o quociente da diferença.

Um pouco desse material é inevitavelmente seco. Se você tiver problema em ficar acordado ao trabalhar arduamente por essas regras, dê uma olhada no último capítulo e dê uma espiada nos dois próximos capítulos para ver por que você deve se preocupar em dominar essas regras da diferenciação. Problemas incontáveis em administração, em economia, medicina, engenharia e física, assim como em outras matérias, lidam com a velocidade com a qual uma função aumenta ou diminui, e isso é o que a derivada nos diz. Muitas vezes é importante saber onde a função está aumentando ou diminuindo mais rapidamente (a inclinação máxima ou mínima) e onde seus picos e vales estão (onde a inclinação é zero). Antes que você possa fazer esses problemas interessantes, você tem que aprender como encontrar derivadas. Se os Capítulos 11 e 12 são como tocar piano, então esse capítulo é como aprender suas escalas – é banal, mas você tem que fazer isso. Você talvez queira pedir um café com leite com espuma extra.

Regras Básicas de Diferenciação

Cálculo pode ser difícil, mas você nunca saberia isso julgando somente esse tópico. Aprender essas seis ou mais regras é um estalo. Se você ficar cansado desse material fácil, no entanto, eu prometo a você muitos desafios no tópico a seguir.

A regra da constante

Isso é simples. $f(x) = 5$ é uma reta horizontal com uma inclinação igual a zero, e assim sua derivada é também igual a zero. Então, para qualquer número c, se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$. Ou você pode escrever $\frac{d}{dx} c = 0$. Fim da história.

A regra da potência

Digamos que $f(x) = x^5$. Para encontrar sua derivada, pegue a potência, 5, traga para frente de x, e então reduza a potência em 1 (nesse exemplo, a potência se torna 4). Isso dá a você $f'(x) = 5x^4$. Para repetir, leve a potência para frente, depois reduza a potência em 1. Isso é tudo a se fazer.

No Capítulo 9, eu fiz a diferenciação de $y = x^2$ com o quociente da diferença:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Isso exige trabalho demais. Em vez de tudo isso, apenas use a regra da potência: Traga o 2 para frente, reduza a potência em 1, o que deixa você com uma potência igual a 1 que você pode deixar pra lá (porque uma potência igual a 1 não faz nada). Assim,

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y' &= 2x \end{aligned}$$

Você talvez esteja pensando, "Então por que você não me disse apenas isso em primeiro lugar?". Bem, eu reconheço que teria economizado algum tempo, especialmente considerando o fato de que uma vez sabendo os métodos de atalho, você nunca usaria o quociente da diferença de novo – exceto na sua prova final. Mas o quociente da diferença está incluído

em todos os cursos e livros de cálculo porque lhe dá um entendimento completo e mais rico sobre o cálculo e seus fundamentos – pense nele como um formador de caráter matemático. *Ou* porque os professores de matemática são sádicos. Você será o juiz.

A regra da potência funciona para qualquer potência: positiva, negativa ou fracionária.

Se $f(x) = x^{-2}$ então $f'(x) = -2x^{-3}$

Se $g(x) = x^{2/3}$ então $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

Se $h(x) = x$ então $h'(x) = 1$

Certifique-se de que você se lembra como fazer a última função. É a função mais simples, embora seja o problema mais fácil de errar.

A melhor maneira de entender essa última derivada é perceber que $h(x) = x$ é uma reta que se encaixa na forma $y = mx + b$ porque $h(x) = x$ é o mesmo que $h(x) = 1x + 0$ (ou $y = 1x + 0$). Devido ao fato de a inclinação dessa reta ser 1, a derivada é igual a 1. Ou você pode apenas memorizar que a derivada de x é 1. Mas se você esquecer essas duas idéias, você sempre pode usar a regra da potência. Reescreva $h(x) = x$ como $h(x) = x^1$ e aplique a regra: Traga o 1 para frente e reduza a potência em 1 até zero, te dando $h'(x) = 1x^0$. Visto que x^0 é igual a 1, você tem $h'(x) = 1$.

Você pode achar a derivada de funções com radicais reescrevendo-as como funções exponenciais e então usar a regra da potência. Por exemplo, se $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, reescreva como $f(x) = x^{2/3}$ e use a regra da potência. Você também pode usar a regra da potência para diferenciar funções do tipo $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Reescreva a função como $f(x) = x^{-3}$ e use a regra da potência.

A regra do múltiplo constante

O que aconteceria se a função que você está tentando diferenciar começasse com um coeficiente? Não faz diferença. Um coeficiente não tem efeito no processo da diferenciação. Você apenas o ignora e acha a derivada de acordo com a regra apropriada. O coeficiente continua onde está até o passo final quando você simplifica sua resposta multiplicando pelo coeficiente.

Ache a derivada de $y = 4x^3$.

Solução: Você sabe através da regra da potência que a derivada de x^3 é $3x^2$, então a derivada de $4(x^3)$ é $4(3x^2)$. O número 4 fica apenas aí sem fazer nada. Depois, como um passo final, você simplifica: $4(3x^2)$ é igual a $12x^2$. Então $y'=12x^2$.

Ache a derivada de $y = 5x$.

Solução: Esta é uma reta na forma $y = mx + b$ com $m = 5$, então a inclinação é 5 e assim a derivada é 5: $y' = 5$ (É importante pensar graficamente dessa maneira de tempos em tempos). Mas você também pode resolver o problema com a regra da potência. $\frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1$; então $\frac{d}{dx}5(x^1) = 5\ (1) = 5$.

Em poucas palavras, a regra do múltiplo constante pega a função do tipo $f(x) = 10$ (*coisa*), acha a derivada dessa *coisa* – isto é *coisa'* – enquanto o número 10 fica apenas quieto no seu lugar. Assim, se $g(x) = 15$ (*coisa*), então $g'(x) = 15$ (*coisa'*).

Um último exemplo: Ache a derivada de $y = \frac{5x^{1/3}}{4}$.

Solução: O coeficiente aqui é $\frac{5}{4}$. Então, devido ao fato de $\frac{d}{dx}x^{1/3} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ (pela regra da potência), $\frac{d}{dx}\frac{5}{4}(x^{1/3}) = \frac{5}{4}(\frac{1}{3}x^{-2/3}) = \frac{5}{12}x^{-2/3}$.

Não se esqueça que π ($\approx$ 3,14) e e ($\approx$ 2,72) são números, e não variáveis, então eles se comportam como números normais. As constantes nos problemas, como c e k também se comportam como números normais (A propósito, o número *e,* em homenagem ao grande matemático Leonhard Euler, é talvez o número mais importante de toda a matemática, mas eu não vou entrar nisso aqui).

Dessa forma, se $y = \pi x$, $y' = \pi$ – isso funciona exatamente como achar a derivada de $y = 5x$. E devido ao fato de π^3 ser apenas um número, se $y = \pi^3$ então $y' = 0$ – isso funciona exatamente igual a achar a derivada de $y = 10$. Você também verá problemas contendo constantes como c e k. Tenha certeza de tratá-los como números normais. Por exemplo, a derivada de $y = 5x + 2k^3$ (onde k é uma constante) é 5, e não $5 + 6k^2$.

A regra da soma – Eh! Essa é uma regra e tanto que você tem aí

Quando você quer a derivada da soma de termos, ache a derivada de cada um dos termos separadamente.

Qual é $f'(x)$ se $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 10$?

Solução: Apenas use a regra da potência para cada um dos primeiros quatro termos e a regra da constante para o último termo. Assim, $f'(x) = 6x^5 + 3x^2 + 2x + 1$.

A regra da diferença – não faz diferença

Se você tem uma diferença (isto é, uma subtração) em vez de uma soma, não faz diferença. Você ainda acha a derivada de cada termo separadamente. Assim, se $y = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x$, então $y' = 15x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 5$. Os sinais de adição e subtração não são afetados pela diferenciação.

Achando a derivada de funções trigonométricas

Senhoras e senhores: Eu tenho um grande prazer e um distinto privilégio de introduzir as derivadas de seis funções trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\,\text{cosec}x = -\text{cosec}x\ \text{cotg}x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x\ \text{tg}x$$

$$\frac{d}{dx}\,\text{tg}x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\,\text{cotg}x = -\text{cosec}^2 x$$

Certifique-se de memorizar as duas primeiras – elas são muito fáceis – eu nunca conheci ninguém que as esquecesse. Se você for bom em decoreba, memorize as quatro últimas da mesma maneira. Alternativamente, se você não for louco pela memorização ou tiver medo que esse conhecimento vá desalojar a data da Batalha de Hastings (1066) – que é muito mais provável de aparecer em um jogo de tabuleiro do que as derivadas trigonométricas – você pode descobrir as quatro últimas derivadas pelo começo usando a regra do quociente (veja o tópico "A regra do quociente" mais adiante).

Ou você talvez goste do seguinte truque mnemônico para as quatro últimas derivadas trigonométricas. Imagine que você esteja fazendo uma prova e não consiga lembrar essas derivadas. Você se debruça sobre o aluno sentado próximo a você e sussurra, "psst, qual é a derivada de cosec$x$?". Agora, pegue as três últimas letras de *psst* (sst) – essas são as letras iniciais de sec, sec, tg. Escreva esses três e abaixo deles escreva suas co-funções: cosec, cosec, cotg. Coloque um sinal negativo no cosec do meio. Finalmente, adicione setas como no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{lcl} \sec\rightarrow & \sec & \leftarrow \text{tg} \\ \text{cosec}\rightarrow & -\text{cosec} & \leftarrow \text{cotg} \end{array}$$

Acredite no que eu digo, você vai se lembrar da palavra *psst*, e depois disso o diagrama será muito fácil de lembrar. Olhe para a fileira de cima: A *sec* da esquerda tem uma seta apontando para *sec tg* – então a derivada de sec$x$ é

$\sec x \operatorname{tg} x$. A *tg* da direita tem uma seta apontando para *sec sec*, então a derivada de $\operatorname{tg} x$ é $\sec^2 x$. A fileira debaixo funciona da mesma maneira, exceto que ambas as derivadas são negativas.

Achando a derivada das funções exponenciais e logarítmicas

Cuidado: decoreba à frente. Que alegria, felicidade pura, maná dos céus...

Funções exponenciais

Se você não conseguir decorar a próxima regra, desligue a sua calculadora.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Isso mesmo – pode realaxar – a derivada de e^x é ela mesma! Essa é uma função especial. e^x e seus múltiplos, como $5e^x$, são as únicas funções que são suas próprias derivadas. Pense sobre o que isso significa. Olhe o gráfico de $y = e^x$ na Figura 10-1.

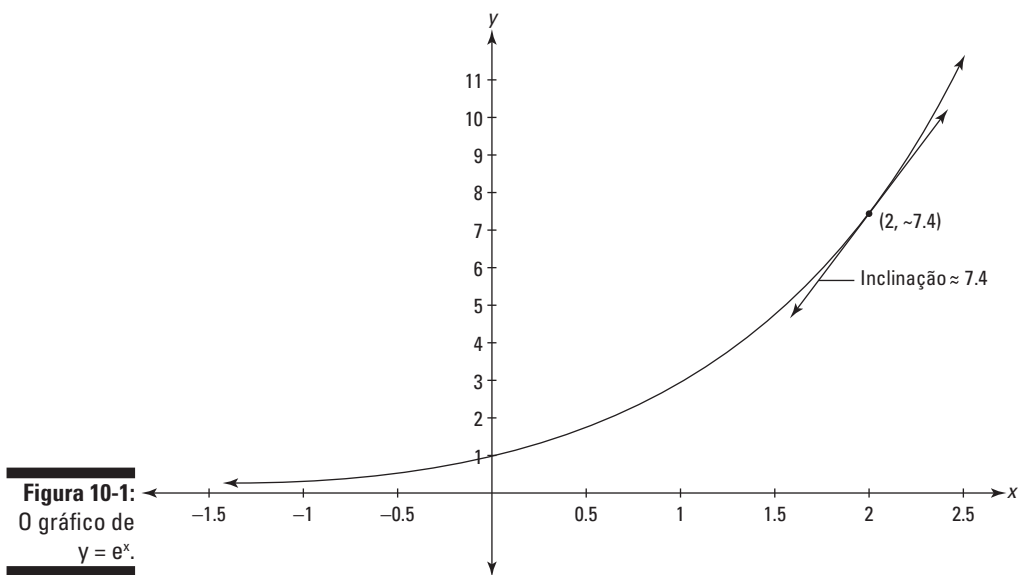



Figura 10-1: O gráfico de $y = e^x$.

Escolha qualquer ponto nessa função, digamos (2, ≈ 7,4) e a altura da função nesse ponto, ≈ 7,4, é igual à inclinação nesse ponto.

Se a base for um número diferente de *e*, você tem que ajustar a derivada multiplicando-a pelo log natural da base:

Se $y = 2^x$, então $y' = 2^x \ln 2$.
Se $y = 10^x$, então $y' = 10^x \ln 10$.

Funções logarítmicas

E agora – o que todos vocês estavam esperando – as derivadas de funções logarítmicas (Veja o Capítulo 4 se quiser revisar logs). Aqui está a derivada de um log *natural* (ou logaritmo neperiano) – isto é, o log com base *e*:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Se a base do log for um número diferente de *e*, você ajusta essa derivada – assim como funções exponenciais – exceto pelo de você *dividir* pelo log natural da base em vez de multiplicar. Assim,

$$\frac{d}{dx}\log_2 x = \frac{\frac{1}{x}}{\ln 2} = \frac{1}{x\ln 2}, \text{ e}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x\ln 10} \quad \text{(Lembre-se que } \log_{10} x \text{ é escrito sem o 10)}$$

Regras da Diferenciação Para Especialistas – Ah, Sim, Eu Sou um Nerd do Cálculo

Agora que você já dominou *totalmente* todas as regras básicas, faça uma pausa e aprecie seu sucesso por um instante... Ok, pronto para um desafio? As regras a seguir, especialmente a regra da cadeia, pode ser difícil. Mas você sabe o que eles dizem: "Quem não arrisca não petisca", "Sem sacrifício, não há recompensa", blá, blá, blá.

A regra do produto

Você usa essa regra para – não perca a calma – o *produto* de duas funções do tipo

$$y = x^3 \,.\, \text{sen}\, x$$

A regra do produto:

Se y = *isso* · *aquilo,*

Então y' = *isso'* · *aquilo* + *isso* · *aquilo'*.

Assim, para $y = x^3 \cdot \text{sen}x$,

$$y' = (x^3)' \,.\, \text{sen} + x^3 \,.\, (\text{sen}x)$$

$$= 3x^2\text{sen}x + x^3 \cos x$$

A regra do quociente

Eu tenho a sensação que você pode adivinhar para que serve essa regra – o *quociente* de duas funções do tipo

$$y = \frac{\text{sen}x}{x^4}$$

A regra do quociente:

Se $y = \dfrac{topo}{base}$,

então $y' = \dfrac{topo' \cdot base - topo \cdot base'}{base^2}$.

Quase todos os livros de cálculo que eu já vi dão essa regra em uma forma um pouco diferente que é mais difícil de lembrar. E alguns livros fornecem um "mnemônico" que envolve as palavras ***lodeehi*** e ***hideelo*** ou ***hodeehi*** e ***hideeho***, que é muito fácil se confundir – ótimo, muito obrigado.

Decore a regra do quociente da maneira que eu a escrevi. Você não vai ter problema em se lembrar do que vai no denominador – ninguém nunca esquece isso. O truque é saber a ordem dos termos no numerador. Pense nisso dessa maneira. Você está fazendo a derivada, então a primeira coisa a fazer é achar a derivada. E é mais natural começar no topo ou na base da fração? No topo, é claro. Assim, a regra do quociente começa com a derivada do topo. Se você se lembrar disso, o resto do numerador é quase automático. Concentre-se nesses pontos e você vai se lembrar da regra do quociente daqui a dez anos – ah, é claro.

Então, aqui está a derivada de $y = \dfrac{\text{sen}x}{x^4}$:

$$y = \frac{(\text{sen}x)' \cdot x^4 - \text{sen}x \cdot (x^4)'}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \,\text{sen}x}{x^8}$$

$$= \frac{x^3\,(x\cos x - 4\text{sen}x)}{x^8}$$

$$= \frac{x\cos x - 4\text{sen}x}{x^5}$$

No tópico "Achando a derivada de funções trigonométricas", eu prometi mostrar a você como encontrar a derivada de quatro funções trigonométricas – *tangente*, *cotangente*, *secante* e *co-secante* – com a regra do quociente. Eu sou um homem de palavra, então aqui vai. Todas as quatro funções podem ser escritas em função do *seno* e *cosseno* – certo? (Veja o Capítulo 6). Por exemplo, $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$. Agora, se você quer a derivada da tg x, você pode usar a regra do quociente:

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$$(\text{tg}x)' = \frac{(\text{sen}x)'\cos x - \text{sen}x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}x \cdot (-\text{sen}x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

(A identidade trigonométrica de Pitágoras diz que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Veja a folha de consulta para esta e outras identidades trigonométricas úteis)

$$= \sec^2 x$$

Reconheço que isso é muito trabalho comparado com apenas decorar a resposta ou usar o mnemônico mostrado algumas páginas atrás, mas é bom saber que você pode achar a resposta dessa maneira em último caso. As outras três funções não são mais difíceis. Tente fazê-las.

A regra da cadeia

A regra da cadeia é de longe a regra da derivada mais complicada, mas não é tão ruim assim se você se concentrar com cuidado em alguns pontos importantes. Comece achando a derivada de $y = \sqrt{4x^3 - 5}$. Você usa a regra da cadeia aqui porque você tem uma função ($4x^3 - 5$) dentro de outra função (a função da raiz quadrada) – em outras palavras, é uma função *composta*.

A propósito, aqui está uma maneira de facilmente reconhecer uma função composta. $y = \sqrt{x}$ *não* é uma função composta porque o *argumento* da raiz quadrada – isto é, a coisa da qual você tira a raiz quadrada – é simplesmente x. Toda vez que o argumento de uma função for algo com exceção do simples e velho x, você tem uma função composta. Tome cuidado ao distinguir uma função composta de algo do tipo $y = \sqrt{x} \cdot \text{sen}\, x$, o que é o *produto* de duas funções, $\sqrt{x}$ e sen x, cada qual contendo apenas um simples e velho x como argumento.

Ok, então você tem essa função composta, $y = \sqrt{4x^3 - 5}$. Aqui está como achar a derivada usando a regra da cadeia.

1. **Você começa com uma função *externa*, $\sqrt{}$, e acha a derivada disso, IGNORANDO o que está dentro. Para ter certeza de ignorar o que está do lado de dentro, substitua temporariamente a função de dentro pela palavra *coisa*.**

   Então você tem $y = \sqrt{coisa}$. Ok, agora ache a derivada de $y = \sqrt{coisa}$ da mesma maneira que você acharia a derivada de $y = \sqrt{x}$. Devido ao fato de $y = \sqrt{x}$ ser o mesmo que $y = x^{1/2}$, a regra da potência lhe dá $y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$. Então para esse problema, você começa com $\frac{1}{2}\, coisa^{-1/2}$.

2. **Multiplique o resultado do Passo 1 pela derivada da função interna, *coisa*'.**

$$y' = \frac{1}{2}\, coisa^{-1/2} \cdot coisa'$$

   Dê uma olhada nisso. *Todos* os problemas básicos envolvendo a regra da cadeia seguem esse formato. Você usa a regra da derivada para a função externa, ignorando a *coisa* interna, depois multiplica isso pela derivada da *coisa*.

3. **Ache a derivada da *coisa* interna.**

   A *coisa* interna nesse problema é $4x^3 - 5$ e sua derivada é $12x^2$ pela regra da potência.

4. **Agora coloque a coisa real e sua derivada de volta no lugar de origem.**

$$y' = \frac{1}{2}\,(4x^3 - 5)^{-1/2} \cdot (12x^2)$$

5. **Simplifique.**

$$y' = 6x^2\,(4x^3 - 5)^{-1/2}$$

   Ou, se você tiver algo contra potências negativas, $y' = \frac{6x^2}{(4x^3 - 5)^{1/2}}$.

   Ou, se você tiver algo contra potências fracionarias, $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 - 5}}$.

   Vamos tentar achar a derivada de outra função composta: $y = \text{sen}(x^2)$.

1. **A função externa é a função seno, então você começa aí, tirando a derivada do seno e ignorando a *coisa* interna, x^2. A derivada do sen$x$ é o cos$x$, então para esse problema, você começa com:**

$$\cos(coisa)$$

2. **Multiplique a derivada da função externa pela derivada da *coisa*.**

$$y' = \cos(coisa) \cdot coisa'$$

3. **A *coisa* nesse problema é x^2, então *coisa'* é 2x. Quando você insere esses termos de volta, você obtém:**

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

De vez em quando descobrir qual função está dentro de qual pode ser um pouco complicado – especialmente quando a função está dentro de outra e ambas estão dentro de uma *terceira* função (você pode ter quatro ou mais funções aninhadas, mas três é provavelmente o máximo que você verá). Aqui está uma dica.

Reescreva a função composta com um conjunto de parênteses para cada função interna, e reescreva as funções trigonométricas do tipo $\text{sen}^2 x$ com a potência do lado de fora dos parênteses: $(\text{sen}x)^2$.

Por exemplo – esse é difícil, se prepare – ache a derivada de $y = \text{sen}^3(5x^2 - 4x)$. Primeiro, reescreva a função cúbica do seno: $y = \left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)^3$. Agora é fácil de ver a ordem na qual as funções estão aninhadas. A função mais interna está dentro dos parênteses mais internos – isto é, $5x^2 - 4x$. Depois, a função seno está dentro do próximo conjunto de parênteses – isto é, sen(*coisa*). Por fim, a função cúbica está do lado de fora de tudo – isto é, *coisa*^{3} (Por eu ser um professor de matemática, eu sou obrigado a mostrar que *coisa* em *coisa*^{3} é diferente de *coisa* em sen(*coisa*). É totalmente não matemático de minha parte usar o mesmo termo para me referir a coisas diferentes, mas não se preocupe – eu estou apenas usando o termo *coisa* para me referir ao que quer que esteja dentro de qualquer função. O termo técnico para essa *coisa* é o *argumento* da função). Ok, agora que você sabe a ordem das funções, você pode achar a derivada às avessas.

1. **A função mais externa é *coisa*^{3} e sua derivada é dada pela regra da potência.**

   $3coisa^2$

2. **Assim como todos os problemas que envolvem a regra da cadeia, você multiplica isso por *coisa*'.**

   $3coisa^2 \cdot coisa'$

3. **Agora coloque a coisa, sen($5x^2 - 4x$), de volta ao seu lugar de origem.**

   $3\left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)^2 . \left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)'$

4. **Use a regra da cadeia de novo.**

   Você não pode terminar esse problema rápido apenas tirando uma simples derivada porque você tem que achar a derivada de outra função composta, $\text{sen}(5x^2 - 4x)$. Apenas trate $\text{sen}(5x^2 - 4x)$ como se fosse o problema original e ache a sua derivada. A derivada de $\text{sen}x$ é $\cos x$, então a derivada de sen(*coisa*) começa com cos(*coisa*). Multiplique isso pela *coisa*. Assim, a derivada de sen(*coisa*) é:

   $\cos(coisa) \cdot coisa'$

5. A *coisa* é $5x^2 - 4x$ e sua derivada é $10x - 4$. Insira essas coisas de volta.

$$\cos(5x^2 - 4x) \cdot (10x - 4)$$

6. Agora que você tem a derivada de sen $(5x^2 - 4x)$, insira esse resultado no resultado do Passo 3, dando a você o grupo todo junto.

$$3\left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)^2 \cdot \cos\,(5x^2 - 4x) \cdot (10x - 4)$$

7. Isso pode ser um pouco simplificado.

$$(30x - 12)\ \text{sen}^2(5x^2 - 4x)\ \cos(5x^2 - 4x)$$

Eu disse a você que era um problema difícil.

Você talvez tenha imaginado que pode economizar tempo não mudando para a palavra *coisa* e depois mudando de volta. Isso é verdade, mas as técnicas forçam você a deixar a *coisa* sozinha durante cada passo do problema. Esse é o ponto crítico.

Certifique-se de NÃO TOCAR NA COISA.

Desde que você se lembre disso, você não precisa, na prática, usar a palavra *coisa* ao fazer um problema envolvendo a regra da cadeia. Você só precisa ter certeza de não mudar uma função interna quando estiver achando a derivada de uma função externa. Digamos que você queira achar a derivada de $f(x) = \ln(x^3)$. O argumento dessa função logarítmica básica é x^3. Não toque nele durante o primeiro passo da solução, que é usar a regra do log natural: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$. Essa regra diz que você coloca o argumento da função no denominador sob o número 1. Então, depois do primeiro passo em diferenciar a derivada de $\ln(x^3)$, você tem $\frac{1}{x^3}$ Você então termina o problema multiplicando isso pela derivada de x^3 que é $3x^2$.

Outra maneira de ter certeza que você entendeu corretamente a regra da cadeia é lembrar que você nunca usa mais do que uma regra da derivada de cada vez.

No exemplo anterior, $\ln(x^3)$, você usa primeiro a regra log natural, depois, como um *passo separado*, você usa a regra da potência para achar a derivada de x^3. Em nenhum ponto, em nenhum problema envolvendo a regra da cadeia, você usa ambas as regras ao mesmo tempo. Por exemplo, com $\ln(x^3)$, você não usa a regra natural do log e a regra da potência ao mesmo tempo para obter $\frac{1}{3x^2}$.

Aqui está a bobagem da regra da cadeia.

A regra da cadeia (para achar a derivada de uma função composta):

Se $y = f\left(g(x)\right)$,

então $y' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

Ou, de forma equivalente,

Se $y = f(u)$,

e $u = g(x)$,

então $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (note como os *duas* se cancelam)

Veja o texto complementar a seguir, "Por que a regra da cadeia funciona?", para uma explicação em português claro de toda essa confusão.

Por que a regra da cadeia funciona?

Você não saberia a partir da difícil matemática nesse tópico ou da bobagem sofisticada da regra da cadeia, mas a regra da cadeia é baseada em uma idéia muito simples. Digamos que uma pessoa esteja andando, outra caminhando lentamente, e uma terceira andando de bicicleta. Se a pessoa que está andando lentamente vai duas vezes mais rápido que a pessoa que está andando, e a pessoa andando de bicicleta vai quatro vezes mais rápido que a que anda lentamente, então a pessoa na bicicleta vai 2 vezes 4, ou 8 vezes mais rápido que a pessoa andando, certo? Essa é a regra da cadeia resumida — você apenas multiplica as razões relativas.

Você se lembra da Figura 9-5 mostrando Laurel e Hardy em uma gangorra? Lembre-se que para cada centímetro que Hardy desce, Laurel sobe em 2 centímetros. Então, a razão do movimento de Laurel é duas vezes a razão de Hardy, e em conseqüência disso $\frac{dL}{dH} = 2$. Agora imagine que Laurel tenha uma língua de sogra na boca — aquela que desenrola quando você assopra, e para cada polegada que ele sobe, ele assopra a língua de sogra em 3 centímetros. A razão do movimento da língua de sogra (S) é assim 3 vezes a razão de movimento de Laurel. Nos símbolos do cálculo, $\frac{dS}{dH} = 3$. Então, qual é a velocidade de movimento da língua de sogra em relação à Hardy? Isso é apenas bom senso. A língua de sogra está se movendo 3 vezes mais rápido do que Laurel, e Laurel está se movendo 2 vezes mais rápido do que Hardy, então a língua de sogra se move 3 vezes 2, ou 6 vezes mais rápido do que Hardy. Aqui está em símbolos (note que isso é o mesmo que a definição formal da regra da cadeia perto do ícone de bobagem matemática):

$$\frac{dN}{dH} = \frac{dN}{dL} \cdot \frac{dL}{dH}$$
$$= 3 \cdot 2$$
$$= 6$$

Apenas uma brincadeira de criança.

Um último exemplo e uma última dica. Ache a derivada de $4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. Esse problema tem uma nova distorção – ele envolve a regra da cadeia *e* a regra do produto. Como você deve começar?

Se você não tiver certeza de onde começar a fazer a diferenciação da expressão complexa, imagine inserir um número no lugar de x e depois avaliar a expressão na sua calculadora um passo de cada vez. Seu *último* cálculo diz a você a *primeira* coisa a se fazer.

Digamos que você tenha inserido o número 5 no lugar de x em $4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. Você avalia $4 \cdot 5^2$ – isto é, 100; assim, depois de achar $5^3 = 125$, você faz o sen(125), que é mais ou menos -0,616. Finalmente, você multiplica 100 por -0,616. Posto que seu *último* cálculo é uma *multiplicação*, seu *primeiro* passo na diferenciação é usar a regra do *produto* (Se o seu último cálculo fosse algo como sen (125), então você começaria com a regra da cadeia).

Você se lembra da regra do produto?

Se $f(x) = isso \cdot aquilo$, então $f'(x) = isso' \cdot aquilo + isso \cdot aquilo'$.

Então para $f(x) = 4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$,

$$f'(x) = (4x^2)'\left(\operatorname{sen}(x^3)\right) + (4x^2)(\operatorname{sen}(x^3))'$$

Agora você termina o problema achando a derivada de $4x^2$ com a regra da potência e a derivada de $\operatorname{sen}(x^3)$ com a regra da cadeia:

$$f'(x) = (8x)\left(\operatorname{sen}(x^3)\right) + (4x^2)\left(\cos(x^3) \cdot 3x^2\right)$$

E agora simplifique:

$$f'(x) = 8x \operatorname{sen}(x^3) + 12x^4 \cos(x^3)$$

Diferenciação Implícita

Todos os problemas de diferenciação mostrados nos tópicos anteriores desse capítulo são funções do tipo $y = x^2 + 3x^2$ ou $y = \operatorname{sen} x$ (e y era algumas vezes escrito como $f(x)$ como em $f(x) = x^3 - 4x^2$). Nesses tipos de casos, y é escrito *implicitamente* como uma função de x. Isso significa que a equação é resolvida em função de y; em outras palavras, y está sozinho de um lado da equação.

Às vezes, no entanto, pedem para você achar a derivada de uma equação que não é resolvida em função de y, como $y^5 + 3x^2 = \operatorname{sen} x - 4y^3$. Essa equação define y implicitamente como uma função de x, e você não pode escrevê-la como uma função explícita porque não pode ser resolvida em função de y. Para esse tipo de problema, você precisa da *diferenciação implícita*. Ao diferenciar implicitamente, todas as regras da derivada funcionam da mesma maneira com uma exceção: quando você diferencia um termo com um y nele, você usa a regra da cadeia com uma pequena distorção.

Você se lembra de usar a regra da cadeia para achar a derivada de algo do tipo $\operatorname{sen}(x^3)$ com a técnica da *coisa*? A derivada do seno é o

cosseno, então a derivada de sen(*coisa*) é sen(*coisa*) · *coisa'* . Você termina o problema achando a derivada da *coisa*, x^3, que é $3x^2$ e depois fazendo as substituições para obter $\cos(x^3) \cdot 3x^2$. Com a diferenciação implícita, um y funciona exatamente como a palavra *coisa*. Assim, devido ao fato de

$$\left(\text{sen}(coisa)\right)' = \cos(coisa) \cdot coisa',$$
$$(\text{sen}\, y)' = \cos y \,.\, y'$$

A distorção é que enquanto a palavra coisa está tomando o lugar da função de x (x^3 nesse exemplo) temporariamente, você não sabe a que o y é igual em termos de x. Então o y e o y' – ao contrário de *coisa* e *coisa'* – continuam na resposta final. Contudo, o conceito é exatamente o mesmo e você pode pensar em y como sendo igual a uma função misteriosa e desconhecida de x. Mas como você não sabe qual é a função, você não pode voltar aos xs no final do problema como pode com um problema regular envolvendo a regra da cadeia.

Eu creio que você deva estar pensando se eu vou em algum momento chegar a fazer o problema. Aqui vai. Novamente, ache a derivada de $y^5 + 3x^2 = \text{sen}x - 4y^3$.

1. **Ache a derivada de cada termo em *ambos* os lados da equação.**

   $$5y^4 \cdot y' + 6x = \cos x - 12y^2 \cdot y'$$

   Para o primeiro e quarto termo, você usa a regra da potência e a regra da cadeia. Para o segundo termo, você usa a regra regular da potência. E para o terceiro termo, você usa a regra regular da trigonometria.

2. **Reúna todos os termos contendo um y' no lado esquerdo da equação e todos os outros termos no lado direito.**

   $$5y^4 - y' + 12y^2 \,.\, y' = \cos x - 6x$$

3. **Fatore o y'.**

   $$y'(5y^4 + 12y^2) = \cos x - 6x$$

4. **Divida para a resposta final.**

   $$y' = \frac{\cos x - 6x}{5y^4 + 12y^2}$$

Note que essa derivada, ao contrário das outras que você fez até agora, é expressa em termos de x e y em vez de apenas x. Então, se você quiser avaliar a derivada para achar a inclinação de um determinado ponto, você precisa ter os valores de x e y para inserir na derivada.

Também note que em muitos livros, o símbolo $\frac{dy}{dx}$ é usado em vez de *y'* em cada passo das soluções como a solução acima. Eu acho *y'* mais fácil e menos inconveniente para se trabalhar. Mas $\frac{dy}{dx}$ tem a vantagem de lembrar a você que você está achando a derivada de *y* em relação a *x*. Cada uma das maneiras está certa. Faça a sua escolha.

Entrando no Ritmo com a Diferenciação Logarítmica

Digamos que você queira achar a derivada de $f(x) = (x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)$. Agora, você pode multiplicar tudo e depois achar a derivada, mas isso seria um *grande* sofrimento. Ou você pode usar a regra do produto algumas vezes, mas isso também seria muito entediante e demorado. A melhor maneira é usar a diferenciação logarítmica.

1. **Tire o log natural de ambos os lados.**

   $$\ln f(x) = \ln\left((x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)\right)$$

2. **Agora use a propriedade do log do produto, que você com certeza se lembra (se não, veja o Capítulo 4).**

   $$\ln f(x) = \ln(x^3 - 5) + \ln(3x^4 + 10) + \ln(4x^2 - 1) + \ln(2x^5 - 5x^2 + 10))$$

3. **Faça a diferenciação de ambos os lados.**

   De acordo com a regra da cadeia, a derivada de $\ln f(x)$ é $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, ou $\frac{f'(x)}{f(x)}$ (O $f(x)$ funciona da mesma maneira que a palavra coisa em um problema regular envolvendo a regra da cadeia ou um y em um problema de diferenciação implícita). Para cada um dos quatro termos do lado direito da equação, você usa a regra da cadeia.

   $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{(x^3 + 5)} + \frac{12x^3}{(3x^4 + 10)} + \frac{8x}{(4x^2 - 1)} + \frac{10x^4 - 10x}{(2x^5 - 5x^2 + 10)}$$

4. **Multiplique ambos os lados por $f(x)$ e você terminou.**

   $$f(x)' = \left(\frac{3x^2}{(x^3 + 5)} + \frac{12x^3}{(3x^4 + 10)} + \frac{8x}{(4x^2 - 1)} + \frac{10x^4 - 10x}{(2x^5 - 5x^2 + 10)}\right)$$
   $$(x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)$$

Eu admito que essa resposta é bem cabeluda, e o processo de solução não é exatamente um passeio no parque, mas, leve o que eu digo em consideração, esse método é *muito* mais fácil do que as outras alternativas.

Fazendo a Diferenciação de Funções Inversas

Existe uma fórmula difícil envolvendo as derivadas de funções inversas, mas antes de chegarmos nela, olhe a Figura 10-2, que gentilmente resume a idéia toda.

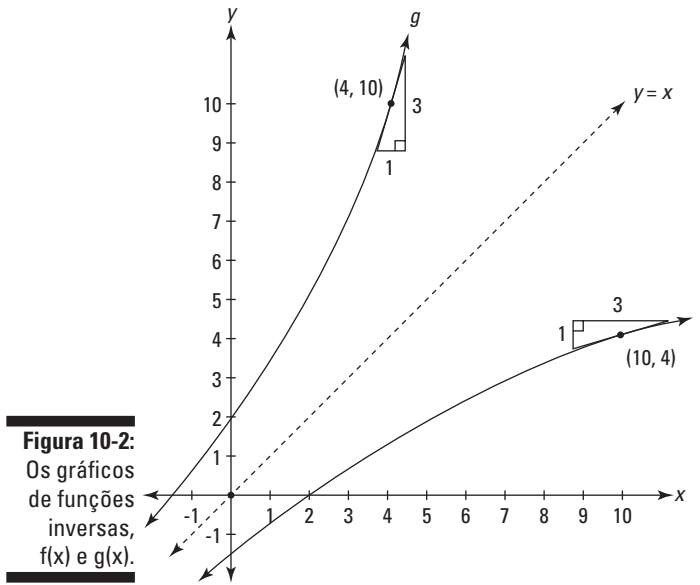



Figura 10-2: Os gráficos de funções inversas, f(x) e g(x).

A Figura 10-2 mostra um par de funções inversas, f e g. Lembre-se que funções inversas são simétricas em relação à linha, $y = x$. Assim como qualquer par de funções inversas, se o ponto (10,4) estiver em uma função, (4,10) está na sua inversa. E, por causa da simetria dos gráficos, você pode ver que as inclinações nesses pontos são recíprocas: Em (10,4) a inclinação é 1/3 e em (4,10) a inclinação é 3/1. É assim que a idéia funciona graficamente, e se você continua comigo até agora, você aprendeu pelo menos visualmente.

No entanto, a explicação algébrica é um pouco complicada. O ponto (10,4) em f pode ser escrito como $(10, f(10))$, e a inclinação nesse ponto – e desse modo a derivada – pode ser expressa como $f'(10)$. O ponto (4,10) em g pode ser escrito como $(4, g(4))$. Então, por $f(10) = 4$, você pode substituir os 4s em $(4, g(4))$ por $f(10)$s, dando a você $(f(10), g(f(10)))$. A inclinação e a derivada nesse ponto podem ser expressas como $g'(f(10))$. Essas inclinações são recíprocas, então isso lhe dá a equação:

$$f'(10) = \frac{1}{g'(f(10))}$$

Essa equação difícil expressa nada mais e nada menos do que dois triângulos nas duas funções na Figura 10-2.

Usando x em vez de 10, você tem a fórmula geral:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Em outras palavras, essa fórmula diz que a derivada de uma função, f, em relação à x, é o recíproco da derivada do seu inverso em relação à . Ok. Talvez seja *muito* complicada.

Escalando as Alturas das Derivadas de Ordem Superior

Encontrar a segunda, terceira, quarta, ou maior derivada é incrivelmente simples. A segunda derivada de uma função é apenas a derivada da sua primeira derivada. A terceira derivada é a derivada da segunda derivada, a quarta derivada é a derivada da terceira, e assim por diante. Por exemplo, aqui está uma função e sua primeira, segunda, terceira, e subseqüentes derivadas. Nesse exemplo, todas as derivadas são obtidas pela regra da potência.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^2 + 12x - 3 \\
f'(x) &= 4x^3 - 10x + 12 \\
f''(x) &= 12x^2 - 10 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= 0 \\
etc. &= 0 \\
etc. &= 0
\end{aligned}$$

Todas as funções polinomiais como essa vão eventualmente para o zero quando você faz a diferenciação separadamente. Funções racionais do tipo $\frac{x^2-5}{x+8}$, por outro lado, ficam cada vez mais confusas à medida que você vai achando as derivadas superiores. E as derivadas superiores do seno e do cosseno são cíclicas. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
y &= \text{sen } x \\
y' &= \cos x \\
y'' &= -\text{sen } x \\
y''' &= -\cos x \\
y^{(4)} &= \text{sen } x
\end{aligned}$$

O ciclo se repete indefinidamente com todo múltiplo de quatro.

Nos Capítulos 11 e 12, eu mostro as muitas utilidades das derivadas superiores – na maioria de segunda ordem (Aqui está uma prévia: A primeira derivada da posição é a velocidade, e a segunda derivada da posição é a aceleração). Mas por enquanto, deixe-me dar a você uma das muitas idéias em poucas palavras. A primeira derivada, como você sabe, diz quão rápido uma função está mudando – quão rápido está subindo ou descendo – isto é, sua inclinação. A segunda derivada diz quão rápida a primeira derivada está mudando – ou, em outras palavras, quão rápido uma inclinação está mudando. Uma terceira derivada diz quão rápida a segunda derivada está mudando, que diz a você quão rápido a razão da mudança da inclinação está mudando. Se você estiver um pouco perdido aqui, não se preocupe – eu também estou perdido. Fica muito difícil entender o que as derivadas superiores te dizem à medida que você passa da segunda derivada, porque você começa a entrar na razão da mudança da razão da mudança da razão da mudança, e assim por diante.

Capítulo 11

Diferenciação e o Formato das Curvas

Neste Capítulo

- Aguentando os altos e baixos das funções mal humoradas
- Localizando os valores extremos
- Usando os testes da derivada primeira e segunda
- Interpretando a concavidade dos pontos de inflexão
- Comparando os gráficos das funções e derivadas
- Apresentando o teorema do valor médio – *GRRRRR*

Se você leu os Capítulos 9 e 10, você é provavelmente um especialista em achar derivadas. O que é uma coisa boa, pois nesse capítulo você usa as derivadas para entender os formatos das funções – onde elas sobem, onde caem, onde atingem o limite máximo e o mínimo, como elas se curvam, e assim por diante. Depois, no Capítulo 12, você usa seu conhecimento sobre o formato das funções para resolver problemas da vida real.

Fazendo uma Longa Viagem de Carro Através do Cálculo

Considere o gráfico de $f(x)$ na Figura 11-1.

Imagine que você esteja dirigindo ao longo dessa função da esquerda para a direita. Ao longo da sua viagem, existem diversos pontos de interesse entre a e l. Todos eles, com exceção dos pontos de partida e chegada, se relacionam com o declive da estrada – em outras palavras, sua inclinação ou derivada.

Agora, se prepare – eu vou mostrar a você muitos termos e definições novas de uma só vez. Você não deve, no entanto, ter muito trabalho com essas idéias porque elas, na sua maioria, envolvem noções de bom senso como dirigir para cima ou para baixo de uma rampa, ou passar pelo topo de uma colina.

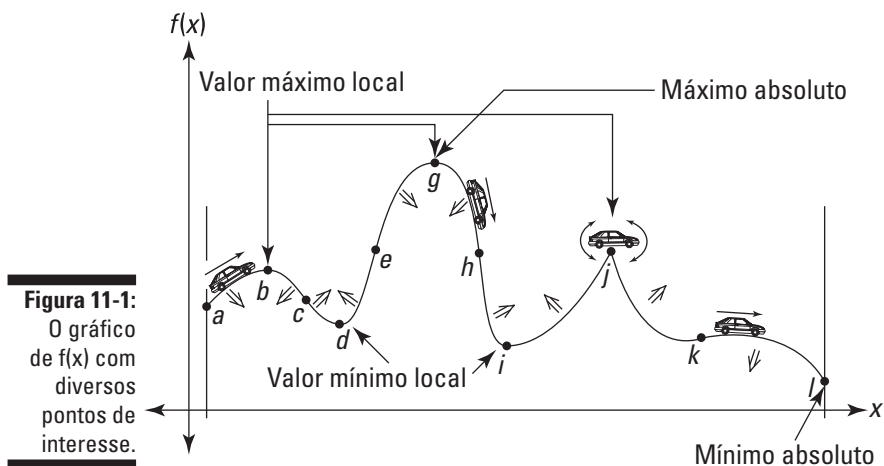



Figura 11-1: O gráfico de f(x) com diversos pontos de interesse.

Escale cada montanha, cruze cada riacho: Inclinações positivas e negativas

Primeiro, note que à medida que você começa uma viagem em *a*, você está subindo. Assim a função está *crescendo* e sua inclinação e derivada são consequentemente *positivas*. Você escala a colina até chegar ao topo em *b* onde a estrada se torna igual. A estrada está nivelada, então a inclinação e a derivada são iguais a *zero*.

Devido ao fato de a derivada ser zero em *b*, o ponto b é chamado de *ponto crítico* da função. O ponto *b* também é um valor máximo local ou máximo relativo de *f* porque é o topo da colina. Para um valor máximo local, *b* tem que apenas ser o ponto mais alto na sua vizinhança imediata. Não importa que a colina do lado em *g* seja maior.

Depois de alcançar o topo da colina em *b*, você começa a descer – bem, é claro. Então, depois de *b*, a inclinação e a derivada são negativas e a função está *decrescendo*. Para a esquerda de qualquer valor máximo local, a inclinação é positiva; para a direita de um valor máximo local, a inclinação é negativa.

Eu não consigo pensar em uma metáfora sobre viagem para essa seção: Concavidade e pontos de inflexão

O próximo ponto de interesse é *c*. Você consegue ver que à medida que desce de *b* para *c*, a estrada fica cada vez mais inclinada, mas depois de c, se bem que você ainda está descendo, a estrada está começando a se curvar gradualmente e ficando menos inclinada? A pequena seta para

baixo entre *b* e *c* na Figura 11-1 indica que essa parte da estrada está curvando para baixo – nesse local, a função é dita ter uma *concavidade voltada para baixo*. Como você pode ver, a estrada também tem uma concavidade voltada para baixo entre *a* e *b*.

Uma porção da função que é côncava para *baixo* se parece com uma *expressão de mau humor*. Onde é côncava para *cima*, como entre *c* e *e*, parece com uma xícara.

Toda vez que a função for côncava para *baixo*, sua derivada está *decrescendo*; toda vez que a função for côncava para *cima*, a sua derivada está *crescendo*.

Assim a estrada é côncava para baixo até *c* onde muda para côncava para cima. Porque a concavidade muda em *c*, ele é um *ponto de inflexão*. O ponto *c* é também o ponto mais inclinado nesse trecho de estrada. Os pontos mais inclinados em uma função – assim como os pontos menos inclinados – sempre ocorrem nos pontos de inflexão.

Tome cuidado com as partes das funções que têm uma inclinação negativa. O ponto *c* é o ponto mais inclinado na sua vizinhança porque ele tem a maior inclinação negativa do que qualquer outro ponto próximo. Mas lembre-se, um número negativo grande é na realidade um número *pequeno*, então a inclinação e a derivada em *c* são na verdade os *menores* de todos os pontos da vizinhança. De *b* para *c* a derivada da função está *decrescendo* (porque está se tornando um número negativo maior). De *c* para *d*, a derivada está *crescendo* (porque está se tornando um número negativo menor).

Esse vale das lágrimas: O valor mínimo local

Vamos voltar à sua viagem. Depois do ponto *c*, você continua a descer a colina até chegar em *d*, a parte final do vale. O ponto *d* é outro ponto crítico porque a estrada está nivelada e a derivada é zero. O ponto *d* é também um valor mínimo relativo ou local porque é o ponto mais baixo da vizinhança imediata.

Uma vista panorâmica: O máximo absoluto

Depois de *d*, você viaja para cima, passando *e*, que é outro ponto de inflexão. É o ponto mais inclinado entre *d* e *g* e o ponto onde a derivada é a maior. Você pára na vista panorâmica em *g*, outro ponto crítico e outro valor máximo local. O ponto *g* também é o *máximo absoluto* no intervalo de *a* até *l* porque é o ponto mais alto da estrada de *a* até *l*.

Problema no carro: Preso no vértice

Descendo de *g*, você passa por outro ponto de inflexão, *h*, outro valor local mínimo, *i*, depois você sobe para *j* onde você estupidamente tenta dirigir sobre o pico. Suas rodas da frente conseguem passar, mas o chassi do carro fica preso no precipício, deixando você balançando para cima e para baixo com suas rodas girando. Seu carro balança em *j* porque você não pode desenhar uma reta tangente nesse ponto. Sem reta tangente significa sem inclinação; e sem inclinação significa que não há derivada, ou você pode dizer que a derivada em *j* é *indefinida*. Um ponto de inflexão acentuado como j é chamado de *vértice*.

É uma descida a partir daqui

Depois de remover o seu carro, você segue descendo, a estrada está ficando cada vez menos inclinada até que fica plana por um momento em *k* (Novamente, note que devido ao fato de a inclinação e de a derivada estarem ficando cada vez mais números *negativos* menores a caminho de *k*, elas estão de fato *crescendo*). O ponto *k* é outro ponto crítico porque sua derivada é zero. É também outro ponto de inflexão porque a concavidade muda de virada para cima para virada para baixo em *k*. Depois de passar por *k*, você desce até *l*, seu destino final. Devido ao fato de *l* ser a extremidade do intervalo, não é um valor mínimo local – extremidades nunca são qualificadas como valores locais mínimos ou máximos – mas é o *mínimo absoluto* no intervalo porque é o ponto mais baixo de *a* até *l*.

Espero que você tenha gostado da sua viagem.

Seu diário da viagem

Eu quero revisar a sua viagem e os termos e definições anteriores e ainda introduzir mais alguns termos:

- A função f na Figura 11-1 tem uma derivada igual a zero nos pontos críticos *b, d, g, i,* e *k*. Se você soma o *j* a essa lista – em *j* a derivada é indefinida – você tem uma lista completa dos *pontos críticos* da função. Os pontos críticos estão onde a derivada é zero ou indefinida. Os valores de *x* desses pontos críticos são chamados de *números críticos* da função.
- Todos os valores máximos e mínimos locais – os topos e vales – devem ocorrer em pontos críticos. No entanto, nem todos os pontos críticos são necessariamente valores máximos ou mínimos locais. O ponto k, por exemplo, é um ponto crítico, mas não é nem valor máximo e nem mínimo local. Os valores máximos e mínimos locais – ou *pontos de máximo e mínimo* – são chamados, conjuntamente, de valores *extremos* locais da função. Use muitos desses plurais sofisticados se você quiser soar como professor. Um número máximo ou mínimo local único é um *extremo* local.

- A função é crescente toda vez que você estiver subindo – onde a derivada for positiva; é decrescente toda vez que você estiver descendo – onde a derivada for negativa. A função também é decrescente no ponto *k*, um ponto de inflexão horizontal, mesmo que a inclinação e a derivada sejam, nesse ponto, igual a zero. Eu percebo que parece um pouco estranho, mas é assim que funciona – acredite na minha palavra. Em todos os pontos de inflexão horizontais, uma função está ou crescendo ou decrescendo. Nos valores extremos *b, d, g, i,* e j, a função não está nem crescendo nem decrescendo.
- A função é côncava para cima toda vez que se parecer com uma xícara ou com um sorriso (alguns dizem que é onde ela "segura água") e côncava para baixo toda vez que se parecer com uma careta (alguns dizem que é onde ela "derrama água"). Os pontos de inflexão *c, e, h,* e *k* estão onde a concavidade muda de côncava para cima para côncava para baixo ou vice versa. Os pontos de inflexão também são os pontos mais ou menos inclinados nas suas vizinhanças imediatas.

Encontrando os Valores Extremos Locais – Minha Mãe, Ela é Assim, Totalmente Extrema

Agora que você terminou o tópico anterior e sabe o que valores extremos locais são, você precisa saber como fazer os cálculos pra achá-los. Você viu no último tópico que todos os valores extremos locais ocorrem nos pontos críticos de uma função – isto é, onde a derivada é zero ou indefinida (não se esqueça, no entanto, que nem todos os pontos críticos precisam ser valores extremos). O primeiro passo para encontrar os valores extremos locais da função é encontrar os seus números críticos (os valores de x dos pontos críticos).

Escrevendo os números críticos

Encontre os números críticos de $f(x) = 3x^5 - 20x^3$. Veja a Figura 11-2.

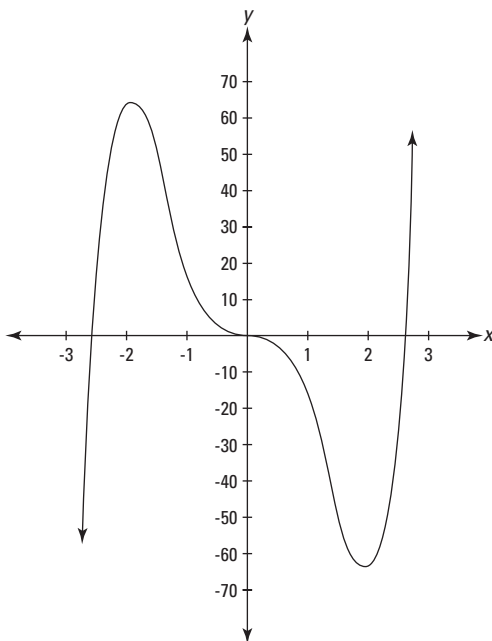



Figura 11-2: O gráfico de f(x) = $3x^5 - 20x^3$

Aqui está o que você deve fazer.

1. Encontre a primeira derivada de *f* usando a regra da potência.

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$
$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

2. Coloque a derivada igual a zero e resolva em função de x.

$$15x^4 - 60x^2 = 0$$
$$15x^2\,(x^2 - 4) = 0$$
$$15x^2\,(x + 2)(x - 2) = 0$$
$$15x^2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$
$$x = 0, -2, \text{ ou } 2$$

Esses três valores de x são números críticos de f. Números críticos adicionais podem existir se a primeira derivada for indefinida em alguns valores de x, mas devido ao fato de a derivada, $15x^4 - 60x^2$, ser definida para todos os valores de entrada, o conjunto solução acima, 0, -2, e 2, é a lista completa dos números críticos. Visto que a derivada de f é igual a zero nesses números críticos, a curva tem tangentes horizontais nesses números.

Agora que você tem a lista dos números críticos, você precisa determinar se picos e vales ocorrem nesses valores de x. Você pode fazer isso com o teste da derivada primeira ou com o teste da derivada segunda. Eu creio que você talvez esteja se perguntando por que você

tem que testar os números críticos quando você pode ver onde os picos e vales estão apenas olhando no gráfico da Figura 11-2, que você pode, é claro, reproduzir na sua calculadora gráfica. Bem pensado. Ok, então esse problema – sem mencionar outros incontáveis problemas que você fez nos cursos de matemática – é um tanto artificial e impraticável. Que novidade!

O teste da derivada primeira

O teste da derivada primeira é baseado em idéias do calibre do Prêmio Nobel: à medida que você passa sobre o topo de uma colina, primeiro você sobe e depois você desce, e que quando você dirige entrando e saindo de um vale, você desce e depois sobe. Essa matéria de cálculo é muito impressionante, não é?

Aqui está como você usa o teste. Pegue uma linha numerada e coloque os números críticos que você achou acima: 0, -2, e 2. Veja a Figura 11-3.

Figura 11-3: Os números críticos de $f(x) = 3x^5 — 20x^3$.

Essa linha numerada é agora dividida em quatro regiões: para a esquerda de -2, de -2 até 0, de 0 até 2, e para a direita de 2. Agora escolha um valor de cada região, insira na derivada primeira, e note se o seu resultado é positivo ou negativo. Vamos usar os números -3, -1, 1, e 3 para testar as regiões.

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 15(-3)^4 - 60(-3)^2 \\ &= 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 \\ &= 675 \end{aligned}$$

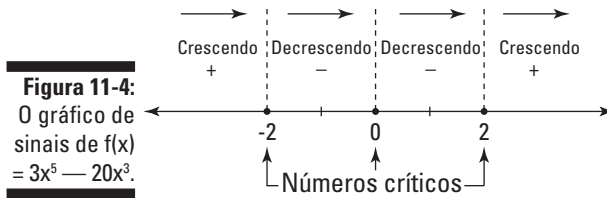
$$\begin{aligned} f'(-1) &= 15(-1)^4 - 60(-1)^2 \\ &= 15 - 60 \\ &= -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 15(1)^4 - 60(1)^2 \\ &= 15 - 60 \\ &= -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= 15(3)^4 - 60(3)^2 \\ &= 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 \\ &= 675 \end{aligned}$$

A propósito, se você notou que a derivada primeira é uma função *par*, você sabe, sem fazer os cálculos, que $f(1) = f(-1)$ e que $f(3) = f(-3)$ (Funções pares são descritas no Capítulo 5. Uma função polinomial com todas as potências pares, como $f'(x)$ acima, é um tipo de função par).

Esses quatro resultados são, respectivamente, positivo, negativo, negativo, e positivo. Agora, pegue a sua linha numerada, marque cada região com o sinal positivo ou negativo apropriado, e indique onde a função está crescendo (onde a derivada é positiva) e onde está decrescendo (onde a derivada é negativa). O resultado é um suposto ***gráfico de sinais***. Veja a Figura 11-4.

Figura 11-4: O gráfico de sinais de $f(x) = 3x^5 — 20x^3$.

A Figura 11-4 diz simplesmente o que você já sabe se você olhou o gráfico de *f* – que a função sobe até -2, desce de -2 até 0, desce mais de 0 até 2, e sobe novamente a partir de 2.

Agora aqui está o bicho-de-sete-cabeças. A função muda de crescente para decrescente em -2; em outras palavras, você sobe até -2 e depois desce. Assim, em -2 você tem uma colina ou um valor máximo local. De maneira oposta, visto que a função muda de decrescente para crescente em 2, você tem aí um vale ou um valor mínimo local. E devido ao fato de os sinais da derivada primeira não mudarem em zero, não há nem um mínimo ou máximo nesse valor de *x*.

O último passo é obter os valores das funções, em outras palavras as alturas, desses dois valores extremos inserindo os valores de *x* na função original:

$$f'(x) = 3x^5 - 20x^3$$

$$f(-2) = 3(-2)^5 - 20(-2)^3$$
$$= 64$$

$$f(2) = 3(2)^5 - 20(2)^3$$
$$= -64$$

Assim, o valor máximo local está localizado em (-2,64) e o valor mínimo local está em (2,- 64). Você terminou.

Para usar o teste da derivada primeira para testar o extremo local em um número crítico em particular, a função deve ser *contínua* para esse valor de *x*.

O teste da derivada segunda – Não, não, tudo menos outro teste!

Se você não gosta do teste da derivada primeira, você pode usar o teste da derivada segunda para encontrar o extremo local da função.

O teste da derivada segunda é baseado em mais duas ideias ganhadoras do Prêmio Nobel: Primeiro, que no topo de uma colina, a estrada tem um formato corcunda – em outras palavras, é uma curva para baixo ou uma *concavidade para baixo*; e segundo, que no final do vale, a estrada tem um formato de uma xícara, então é uma curva para cima ou uma *concavidade para cima*.

A concavidade de uma função em um ponto é dada pela derivada segunda: uma derivada segunda ***positiva*** significa que a função é côncava para ***cima***, uma derivada segunda ***negativa*** significa que a função é côncava para ***baixo***, e uma derivada segunda igual a ***zero*** é ***inconclusiva*** (a função pode ser côncava para cima, côncava para baixo, ou pode haver um ponto de inflexão nesse lugar). Então, para a nossa função f, tudo o que você tem que fazer é encontrar a derivada segunda e depois inserir os números críticos que você achou – -2, 0, e 2 – e notar se seus resultados são positivos, negativos, ou zero. Quer dizer –

$$f'(x) = 3x^5 - 20x^3$$
$$f''(x) = 15x^4 - 60x^2 \text{ (regra da potência)}$$
$$f''(x) = 60x^3 - 120x \text{ (regra da potência)}$$

$$f''(-2) = 60(-2)^3 - 120(-2) = -240$$
$$f''(0) = 60(0)^3 - 120(0) = 0$$
$$f''(2) = 60(2)^3 - 120(2) = 240$$

Em -2, a derivada segunda é negativa (-240). Isso diz a você que f é côncava para baixo onde x é igual a -2, e então que há um valor máximo local em -2. A derivada segunda é positiva (240) onde x é 2, então f é côncava para cima e dessa forma há um valor mínimo local em $x = 2$. Devido ao fato de a derivada segunda ser igual a zero em $x = 0$, o teste da derivada segunda falha – ele não diz nada sobre a concavidade em $x = 0$ ou se há um valor mínimo ou máximo nesse lugar. Quando isso acontece, você tem que usar o teste da derivada primeira.

Agora dê mais uma olhada nos testes da derivada primeira e segunda com outro exemplo. Encontre os valores extremos de $g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$ (Veja a Figura 11-5).

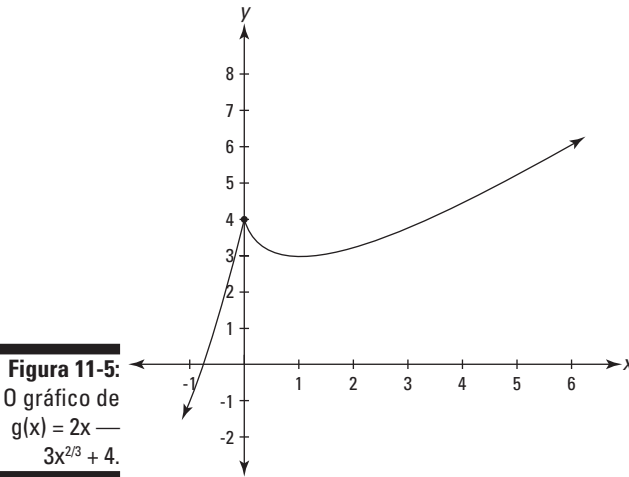



Figura 11-5: O gráfico de $g(x) = 2x — 3x^{2/3} + 4$.

1. Encontre a derivada primeira de g.

$$g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$$
$$g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$$

2. Coloque a derivada igual a zero e resolva.

$$2 - 2x^{-1/3} = 0$$
$$-2x^{-1/3} = -2$$
$$x^{-1/3} = 1$$
$$(x^{-1/3})^{-3} = 1^{-3}$$
$$x = 1$$

Assim o 1 é um número crítico

3. Determine se a derivada primeira é indefinida para algum valor de x.

$2x^{-1/3}$ é igual a $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Agora, posto que a raiz cúbica de zero seja igual a zero, se você inserir zero em $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, você teria $\frac{2}{0}$, que é indefinida. Então a derivada, $2 - 2x^{-1/3}$, é indefinida em $x = 0$, e assim 0 é outro número crítico. Agora você tem uma lista completa de números críticos para g: 0 e 1.

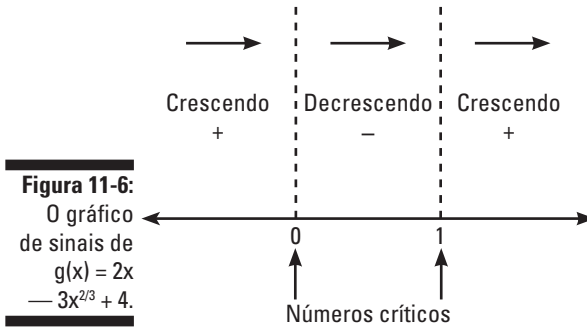
4. Insira os números críticos em uma linha numerada, e então use o teste da derivada primeira para descobrir o sinal de cada região.

Você pode usar –1, 0.5, e 2 como números testes.

$$g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$$

$$g'(-1) = 4$$
$$g'(0.5) \approx -0,52$$
$$g'(2) \approx 0,41$$

A Figura 11-6 mostra o gráfico de sinais.

Figura 11-6: O gráfico de sinais de g(x) = 2x — $3x^{2/3}$ + 4.

Visto que a derivada primeira de g muda de positiva para negativa em 0, há um valor máximo local aí. E porque a derivada primeira muda de negativa para positiva em 1, há um valor mínimo local em $x = 1$.

5. **Insira os números críticos em *g* para obter os valores da função (as alturas) desses dois números extremos.**

$$g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 5$$

$$g(0) = 4$$
$$g(1) = 3$$

Assim, há um valor máximo local em (0,4) e um valor mínimo local em (1,3). Você terminou.

Você poderia ter usado o teste da derivada segunda em vez do teste da derivada primeira no passo 4. Primeiro você precisa da derivada segunda de g, que é, como você sabe, a derivada da primeira derivada.

$$g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$$

$$g''(x) = \frac{2}{3}x^{-4/3}$$

Agora, avalie a derivada segunda em 1 (o número crítico onde $g' = 0$).

$$g''(1) = \frac{2}{3}$$

Posto que $g''(1)$ é positivo $\left(\frac{2}{3}\right)$, você sabe que g é côncava para cima em $x = 1$ e, conseqüentemente, que há um valor mínimo local aí. O teste da derivada segunda não ajuda onde a derivada primeira é indefinida (onde $x = 0$), então você tem que usar o teste da derivada primeira para esse número crítico.

Encontrando os Valores Máximos e Mínimos Absolutos em um Intervalo Fechado

Toda função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo – em outras palavras, um ponto máximo e mínimo – embora, como você pode ver no exemplo a seguir, possa haver um empate entre o valor máximo e mínimo.

Um intervalo *fechado* como [2,5] inclui os pontos finais 2 e 5. Um intervalo *aberto* como (2,5) exclui os pontos finais.

Encontrar o valor máximo e mínimo absoluto é muito fácil. Tudo o que você faz é calcular o número crítico da função no dado intervalo, determinar a altura da função em cada número crítico, e depois descobrir a altura da função nos dois pontos finais do intervalo. O maior desse conjunto de alturas é o valor máximo absoluto; e o menor, é claro, é o valor mínimo absoluto. Aqui tem um exemplo: Encontre o valor máximo e mínimo absoluto de $h(x) = \cos(2x) - 2\operatorname{sen}x$ no intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

1. Encontre os números críticos de *h* no intervalo aberto $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

(Veja o Capítulo 6 se você estiver um pouco enferrujado em funções trigonométricas.)

$$h(x) = \cos(2x) - 2\operatorname{sen}x$$

$$h'(x) = -\operatorname{sen}(2x) \cdot 2 - 2\cos x$$

(regra da cadeia)

$$0 = -2\operatorname{sen}(2x) - 2\cos x$$

$$0 = \operatorname{sen}(2x) + \cos x \qquad \text{(divida ambos os lados por -2)}$$

$$0 = 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos x \qquad \text{(identidade trigonométrica; olhe a folha de cola)}$$

$$0 = \cos x\,(2\operatorname{sen}x + 1) \qquad \text{(fatore o cosx)}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\operatorname{sen}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \qquad\qquad 2\operatorname{sen}x = -1$$

$$\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Assim, os zeros de *h'* são $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$, e $\frac{11\pi}{6}$, e porque *h'* é definida para todos os números de entrada, essa é uma lista completa de números críticos.

2. Calcule os valores da função (as alturas) em cada número crítico.

$$h(x) = \cos(2x) - 2\text{sen}x$$

$$h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) - 2\ \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$= 0{,}5 - 2 \cdot (-0{,}5)$$
$$= 1{,}5$$

$$h\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{6}\right) - 2\ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$
$$= -1 - 2 \cdot (-1)$$
$$= 1$$

$$h\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) - 2\ \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$= 0{,}5 - 2 \cdot (-0{,}5)$$
$$= 1{,}5$$

3. Determine os valores da função nos pontos finais do intervalo.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -1 - 2 \cdot 1$$
$$= -3$$

$$h\ (2\pi) = \cos(2\ .2\pi) - 2\text{sen}(2\pi)$$
$$= 1 - 2 \cdot 0$$
$$= 1$$

Assim, a partir dos passos 2 e 3, você encontrou cinco alturas: 1.5, 1, 1.5, –3, e 1. O maior número nessa lista, 1.5, é o valor máximo absoluto; o menor, –3, é o valor mínimo absoluto.

O valor máximo absoluto ocorre em dois pontos: $\left(\frac{7\pi}{6}, 1{,}5\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{6}, 1{,}5\right)$. O valor mínimo absoluto ocorre em um dos pontos finais, $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$, e é então chamado de *ponto final extremo*.

A Tabela 11-1 mostra os valores de $h(x) = \cos(2x) -2$ em três números críticos no intervalo de $\frac{\pi}{2}$ até 2π e no intervalo dos pontos finais; a Figura 11-7 mostra o gráfico de h.

Tabela 11-1 **Valores deh(x) = cos(2x) – 2senx nos números críticos e pontos finais para o intervalo ($\frac{\pi}{2}$, 2π)**

h(x)	-3	1,5	1	1,5	1
x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Algumas observações. Primeiramente, como você pode ver na Figura 11-7, ambos os pontos $\left(\frac{7\pi}{6}, 1.5\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{6}, 1.5\right)$ são valores máximos ***locais*** de ***h***, e o ponto $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$ é um valor mínimo ***local*** de ***h***. Todavia, se você quiser encontrar apenas os valores ***absolutos*** em um intervalo fechado, você não tem que prestar atenção se os pontos críticos são máximos ou mínimos locais, ou nenhum dos dois. E assim você não tem que se preocupar em usar o teste da derivada primeira e segunda. Tudo o que você tem que fazer é determinar as alturas nos números críticos e nos pontos finais e depois escolher os maiores e menores números da lista. Em segundo lugar, o valor máximo e mínimo absoluto no dado intervalo não diz nada sobre como a função se comporta fora do intervalo. A função ***h***, por exemplo, pode crescer para além de 1,5 fora do intervalo de $\frac{\pi}{2}$ até 2π (embora não cresça), e ela pode descer mais baixo que -3 (embora também não desça).

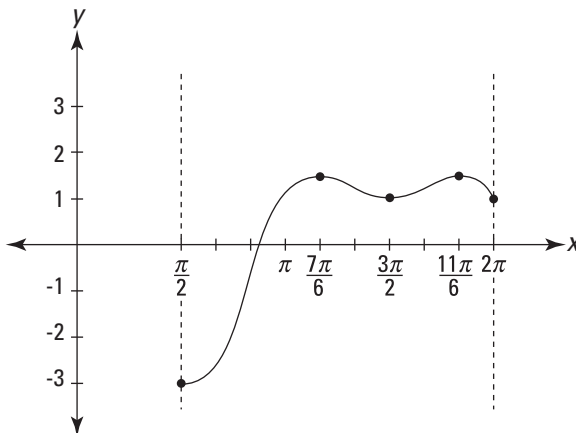



Figura 11-7: O gráfico de H(x) = cos(2x) — 2sen x.

Encontrando os Valores Máximos e Mínimos Absolutos Sobre Todo o Domínio de uma Função

O *máximo absoluto* e o *mínimo absoluto* de uma função sobre *todo o seu domínio* são os valores *maior* e *menor* únicos da função em qualquer lugar que seja definida. Uma função pode ter um máximo ou mínimo absoluto ou nenhum dos dois. Por exemplo, a parábola $y = x^2$ tem um mínimo absoluto no ponto (0,0) – a base do seu formato de xícara – mas nenhum máximo absoluto porque sobe para sempre para a esquerda e para a direita. Você pode dizer que seu máximo absoluto é infinito se não fosse pelo fato que infinito não é um número e assim não pode ser qualificado como um máximo – e o mesmo, é claro, para o infinito negativo como um mínimo.

A ideia básica é essa: Ou uma função vai alcançar o limite máximo em algum lugar ou vai crescer para sempre até o infinito. E a mesma ideia se aplica a um mínimo e descendo até o infinito negativo. Eu passo pelo método básico e depois mostro algumas exceções.

Para localizar o máximo e mínimo absoluto sobre seu domínio de uma função, apenas encontre a altura da função em cada um dos seus números críticos. Você fez isso no tópico anterior, exceto que dessa vez você considera *todos* os números críticos, não apenas os de um dado intervalo. O maior desses valores é o máximo absoluto a não ser que a função cresça para o infinito positivo em algum lugar, no qual você diz que não há máximo absoluto. O menor desses valores é o mínimo absoluto, a não ser que a função desça para o infinito negativo, no qual não tem um mínimo absoluto.

Se uma função sobe para o infinito positivo ou desce para o infinito negativo, ela faz isso nos seus extremos da direita e da esquerda ou em uma assíntota vertical. Então, seu último passo (depois de avaliar todos os pontos críticos) é avaliar o $\lim_{x \to \infty}$ e o $\lim_{x \to -\infty}$ – o tão chamado *comportamento final* da função – e o limite da função à medida que x se aproxima de cada assíntota vertical pela esquerda e pela direita. Se cada um desses limites for igual ao infinito positivo, então o máximo absoluto é o valor da função no maior dos pontos críticos. E se qualquer um desses limites for o infinito negativo, então a função não tem um mínimo absoluto; se nenhum deles for igual ao infinito negativo, então o mínimo absoluto é o valor da função no menor dos pontos críticos.

A Figura 11-8 mostra algumas funções onde o método acima não vai funcionar. A função $f(x)$ não tem um máximo absoluto apesar de o fato de que ela não sobe para o infinito. Seu máximo não é 4 porque ela nunca chega a 4, e seu máximo não pode ser nada menor do que 4, como 3.999, porque sobe mais do que 3.9999. A função $g(x)$ não tem um mínimo absoluto apesar de o fato de que ela não desce para o infinito negativo. Indo para a esquerda, $g(x)$ avança lentamente ao longo da assíntota horizontal em $y = 0$, mas nunca fica menor do que zero e, então, nem o zero e nem nenhum outro número pode ser o mínimo absoluto.

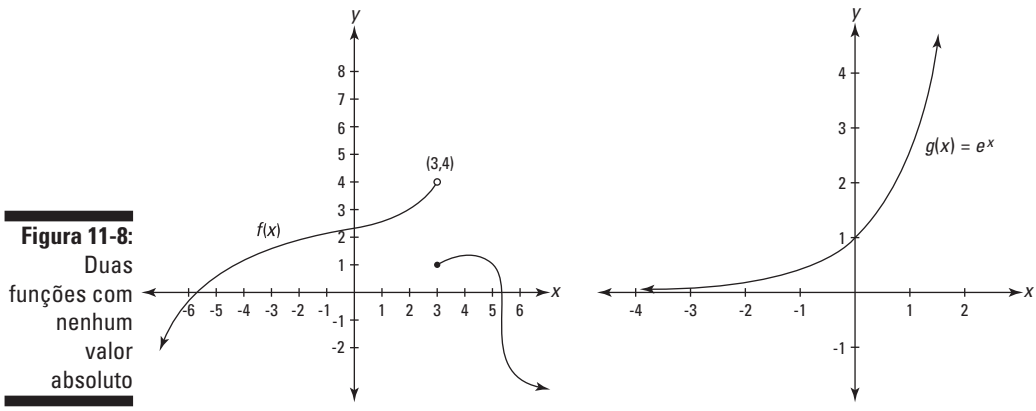



Figura 11-8: Duas funções com nenhum valor absoluto

Localizando a Concavidade e os Pontos de Inflexão

Olhe novamente a função $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ na Figura 11-2. Você usou os três números críticos de f, -2, 0, e 2, para achar o valor extremo local: (-2,64) e (2,-64). Esse tópico investiga o que acontece em outra parte da função – especificamente, onde a função é côncava para cima ou para baixo e onde a concavidade muda (os pontos de inflexão).

O processo para encontrar a concavidade e os pontos de inflexão é parecido com usar o teste da derivada primeira e o gráfico de sinais para encontrar o valor extremo local, exceto que agora você usa a segunda derivada (Veja o tópico "encontrando o valor extremo local"). Aqui o que você faz é encontrar os intervalos da concavidade e os pontos de inflexão de $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

1. Encontre a derivada segunda de *f*.

$f(x) = 3x^5 - 20x^3$
$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$ (regra da potência)
$f''(x) = 60x^3 - 120x$ (regra da potência)

2. Coloque a derivada segundo igual a zero e resolva.

$60x^5 - 120x = 0$
$60x\,(x^2 - 2) = 0$
$60x = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$
$x = 0$ $\quad x^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2}$

3. Determine se a derivada segunda é indefinida para qualquer valor de *x*.

$f''(x) = 60x^3 - 120x$ é definida para todos os números reais, então não há nenhum outro valor de *x* para adicionar à lista do passo 2. Assim, a lista completa é $-\sqrt{2}$, 0, e $\sqrt{2}$.

Os passos 2 e 3 lhe dão o que você chamaria de "números críticos da segunda derivada" de *f* porque eles são parecidos com os números críticos de *f* que você encontra usando a derivada primeira. Mas, até onde eu sei, esse conjunto de números não tem um nome especial. Em qualquer evento, o importante, a saber, é que essa lista é formada pelos zeros de f'' mais qualquer valor de *x* onde f'' é indefinido.

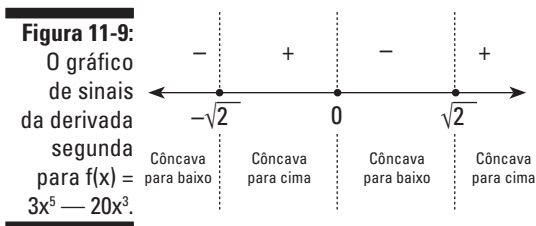
4. Represente esses números numa linha numerada e teste as regiões com a derivada segunda.

Use -2, -1, 1, e 2 como números testes.

$$f'' = 60x^3 - 120x$$

$$f''(-2) = -240$$
$$f''(-1) = 60$$
$$f''(1) = -60$$
$$f''(2) = 240$$

A Figura 11-9 mostra o gráfico de sinais.

Figura 11-9: O gráfico de sinais da derivada segunda para $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Um sinal positivo no gráfico de sinais diz a você que a função é côncava para cima naquele intervalo; um sinal negativo significa uma concavidade para baixo. A função tem um ponto de inflexão (geralmente) em qualquer valor de *y* onde os sinais mudam de positivo para negativo e vice versa.

Devido ao fato de os sinais mudarem em $-\sqrt{2}$, 0, e $\sqrt{2}$ e porque esses três números são zeros de f'', os pontos de inflexão ocorrem nesses valores de *x*. Se, no entanto, você tem um problema onde os sinais mudam em número onde f'' é indefinido, você tem que verificar uma coisa adicional antes de concluir que nesse ponto há um ponto de inflexão.

Um ponto de inflexão existe em um dado valor de x somente se há uma reta tangente à função em qualquer número. Esse é o caso toda vez que a primeira derivada existe ou onde há uma tangente vertical.

5. **Insira esses três valores de *x* em *f* para obter os valores da função dos três pontos de inflexão.**

$$f = 3x^5 - 20x^3$$

$$f(-\sqrt{2}) \approx 39{,}6$$
$$f(0) = 0$$
$$f(\sqrt{2}) \approx 39{,}6$$

A raiz quadrada de dois é igual a mais ou menos 1.4, então há pontos de inflexão por volta de (-1.4, 39.6), (0,0), e por volta de (1.4, -39.6). Você terminou.

A Figura 11-10 mostra os pontos de inflexão de *f*, bem como seus valores locais e seus intervalos de concavidade.

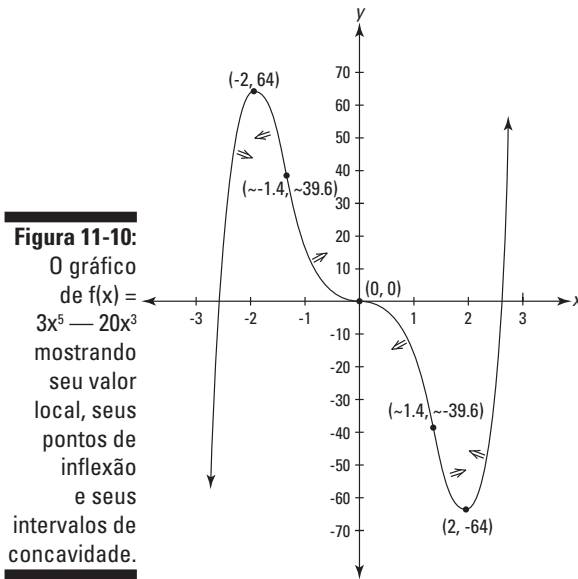



Figura 11-10: O gráfico de f(x) = $3x^5 - 20x^3$ mostrando seu valor local, seus pontos de inflexão e seus intervalos de concavidade.

Olhando os Gráficos das Derivadas Até que Eles me Tirem do Sério

Você pode aprender muito sobre as funções e suas derivadas olhando para elas lado a lado e comparando as suas características importantes. Siga $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ da esquerda para a direita (veja a Figura 11-11), pausando para observar seus pontos de interesse, e também para observar o que está acontecendo com o gráfico de $f'(x) = 15x^4 - 60x^2$ nos mesmos pontos.

Enquanto você olha o gráfico de *f'* na Figura 11-11, ou o gráfico de qualquer outra derivada, talvez você precise se lembrar a cada minuto que está olhando para a ***derivada*** e não para a função – de novo, isso não é a ***função***. Você já olhou para centenas e centenas de gráficos de funções ao longo dos anos, então quando você começa a olhar os gráficos de derivadas, você pode facilmente pensar nelas como sendo funções regulares.

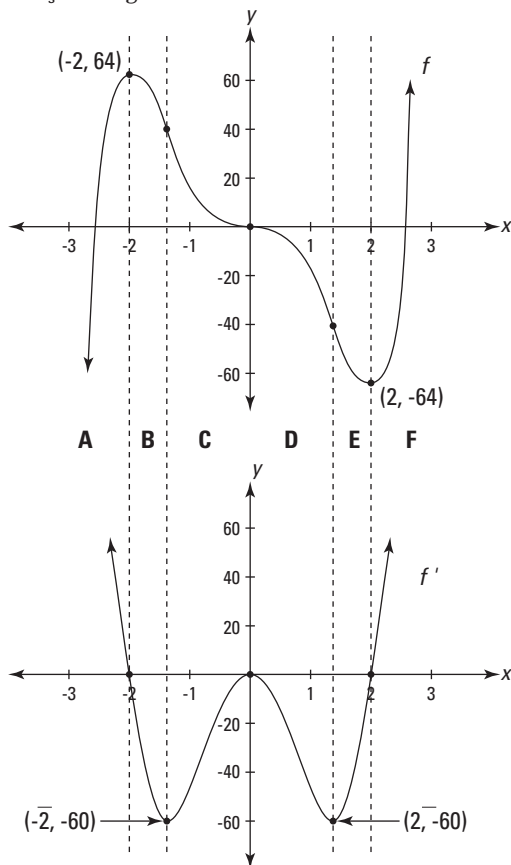



Figura 11-11: $f(x) = 3x^5 — 20x^3$ e sua derivada primeira $f'(x) = 15x^4 — 60x^2$.

Você pode, por um instante, olhar para um intervalo que está subindo no gráfico de uma derivada e por engano concluir que a função original também pode estar subindo no mesmo intervalo. Este é um erro fácil de ser cometido. Você sabe que a derivada primeira é a mesma coisa que a inclinação. Então, quando você vê o gráfico da derivada primeira subindo, você talvez pense, "Oh, a derivada primeira (a inclinação) está subindo, e quando a inclinação sobe é a mesma coisa que estar subindo uma colina, então a função original deve estar crescendo". Isso parece razoável porque, *livremente* falando, você pode descrever o lado da frente de uma colina como uma inclinação que está subindo, crescendo. Mas *matematicamente* falando, o lado da frente de uma colina tem uma inclinação *positiva*, não necessariamente uma inclinação *crescente*. Assim, onde a função está crescendo, o gráfico da sua derivada será *positivo*, mas pode estar subindo ou descendo.

Digamos que você esteja subindo uma colina. À medida que você se aproxima do topo da colina, você já está *subindo*, em geral, a *inclinação* (o declive) está *descendo*. Talvez seja 3, depois 2, depois 1, e depois, no topo da colina, a inclinação é zero. Então a inclinação está ficando menor ou *decrescendo*, ao mesmo tempo em que você está subindo a colina ou *crescendo*. Nesse tipo de intervalo, o gráfico da função é *crescente*, mas o gráfico da sua derivada é *decrescente*. Entendeu?

Ok, emtão começamos pela esquerda, *f* cresce até o máximo local em (-2,64). Ela está subindo, então a sua inclinação é *positiva*, mas *f* está *ficando* cada vez menos inclinada e assim sua inclinação é *decrescente* – a inclinação decresce até se tornar zero no topo. Isso corresponde ao gráfico de *f'* (a inclinação) que é *positiva* (porque está acima do eixo *x*), mas *decrescente* à medida que desce para o ponto (-2,0).

Agora que a sua cabeça está bem menos confusa, você está pronto para as regras a seguir sobre como o gráfico de uma função se compara ao gráfico da sua derivada:

- Um intervalo *crescente* em uma função corresponde ao intervalo *positivo* no gráfico da sua derivada (ou *zero* para um ponto se a função tiver um ponto de inflexão horizontal). Em outras palavras, o intervalo crescente de uma função corresponde à parte do gráfico da derivada que está acima do eixo *x* (ou que toca o eixo em um único ponto no caso de um ponto de inflexão horizontal). Veja os intervalos A e F na Figura 11-11.
- Um *máximo* local no gráfico de uma função corresponde ao *zero* (ou a interseção *x*) em um intervalo do gráfico da sua derivada que cruza o eixo *x descendo*.

  Quando você está olhando para vários pontos no gráfico da derivada, não esqueça que a coordenada *y* do ponto – como (-2,0) – em um gráfico da derivada primeira diz a você a *inclinação* da função original, e não a sua altura. Pense no eixo *y* no gráfico da derivada primeira como sendo o eixo-*inclinação* ou o eixo-*m*.

- Um intervalo *decrescente* em uma função corresponde a um intervalo *negativo* no gráfico da derivada (ou *zero* para um ponto se a função tiver um ponto de inflexão horizontal). O intervalo negativo no gráfico da derivada está abaixo do eixo *x* (ou no caso de um ponto de inflexão horizontal, o gráfico da derivada toca o eixo *x* em um único ponto). Veja os intervalos B, C, D, e E na Figura 11-11, onde *f* desce o caminho todo até o mínimo local em (2,-64) e onde *f'* é negativo – exceto pelo ponto (0,0) – até chegar a (2,0).
- O *mínimo* local no gráfico de uma função corresponde ao *zero* (ou interseção *x*) em um intervalo do gráfico da sua derivada que cruza o eixo *x subindo*.

Agora reconstitua mentalmente seus passos e olhe para a concavidade e para os pontos de inflexão de *f* na Figura 11-11. Primeiramente, considere os intervalos A e B na figura. Começando pela esquerda de novo, o gráfico de *f* é côncavo para baixo – o que significa a mesma coisa que uma inclinação *decrescente* – até que chegue ao ponto de inflexão em mais ou menos (-1.4, 39.6).

Então, o gráfico de *f' decresce* até chegar à base em mais ou menos (-1.4, -60). Essas coordenadas dizem que o ponto de inflexão em -1.4 em *f* tem uma inclinação igual a -60. Note que o ponto de inflexão em (-1.4, 39.6) é o ponto mais íngreme nesse pedaço da função, mas tem a *menor* inclinação porque sua inclinação é um número *negativo* maior que a inclinação de qualquer ponto próximo.

Entre (-1.4, 39.6) e o próximo ponto de inflexão em (0,0), *f* é côncava para cima, o que significa a mesma coisa que uma inclinação *crescente*. Assim o gráfico de *f' cresce* a partir de mais ou menos -1.4 até onde toca o máximo local em (0,0). Veja o intervalo C na Figura 11-11.

É hora para mais algumas regras:

- Um intervalo de concavidade para *baixo* no gráfico de uma função corresponde a um intervalo *decrescente* no gráfico da sua derivada – intervalos A, B, e D na Figura 11-11. E um intervalo com concavidade para cima na função corresponde a um intervalo *crescente* na derivada – intervalos C, E, e F.
- Um ponto de inflexão em uma função (exceto para um ponto de inflexão vertical onde a derivada é indefinida) corresponde ao *extremo* local no gráfico da sua derivada. Um ponto de inflexão de inclinação *mínima* corresponde ao *mínimo* local no gráfico da derivada; um ponto de inflexão de inclinação *máxima* corresponde ao *máximo* local no gráfico da derivada.

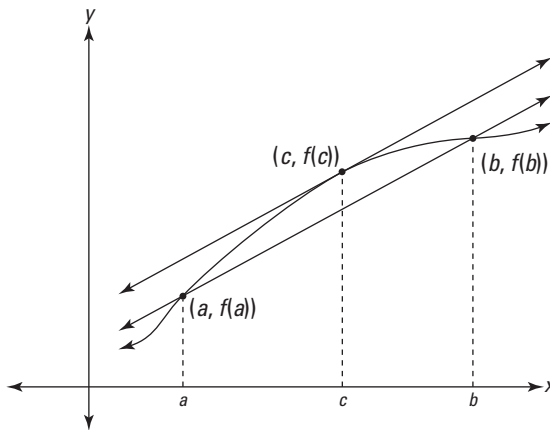
Depois de (0,0), *f* é côncava para baixo até o seu ponto de inflexão em mais ou menos (1.4, -39.6) – isso corresponde à seção decrescente de *f'* de (0,0) até seu mínimo em (1.4, -60) – intervalo D na Figura 11-11. Finalmente, *f* é côncava para cima no resto do caminho, que corresponde à seção crescente em *f'* começando em (1.4, -60) – intervalos E e F na figura.

Bem, isso quase leva você ao final da estrada por agora. Ir e voltar entre os gráficos de uma função e da sua derivada pode ser *muito* irritante no começo. Se sua cabeça começar a girar, faça uma pausa e volte para isso depois.

Se eu ainda não consegui te fazer *derivar* alucinações – essas piadinhas do cálculo não são fantásticos? – talvez esse tópico final faça isso. Olhe novamente para o gráfico da derivada, *f'*, na Figura 11-11 e também para o gráfico dos sinais na Figura 11-9. Esse gráfico de sinais, porque é um gráfico de sinais da derivada segunda, produz exatamente (bem, quase exatamente) a mesma relação para o gráfico de *f'* como o gráfico de sinais da derivada primeira produz para o gráfico de uma função regular. Em outras palavras, intervalos *negativos* no gráfico de sinais na Figura 11-9 – para a esquerda de $-\sqrt{2}$ e entre 0 e $\sqrt{2}$ – mostram onde o gráfico de *f'* está *decrescendo*, e intervalos *positivos* no gráfico de sinais – entre $-\sqrt{2}$ e 0 e para a direita de $\sqrt{2}$ - mostram onde *f'* está *crescendo*. E o ponto onde os sinais trocam de positivo para negativo ou vice versa é o extremo local de *f'*. Nem um pouco claro, não é?

O Teorema do Valor Médio – GRRRRR

Você não precisa do teorema do valor médio para muita coisa, mas é um teorema famoso – um dentre os dois ou três mais importantes em todo o cálculo – então você realmente deveria aprendê-lo. É muito simples e tem uma conexão legal com o teorema do valor médio para as integrais que eu mostro no Capítulo 16. Veja a Figura 11-12.

Figura 11-12: Uma ilustração do teorema do valor médio.

Aqui está a definição formal desse teorema.

O teorema do valor médio: Se f é contínua no intervalo fechado [a,b] e diferenciável no intervalo aberto (a,b), então existe pelo menos um número c em (a,b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Agora para a versão em português básico. Primeiro você precisa tomar cuidado com os detalhes. As exigências no teorema de que a função seja contínua e diferenciável apenas garantem que a função é uma função regular e uniforme sem intervalos e vértices. Mas, pelo fato de somente algumas funções estranhas terem intervalos e vértices, você geralmente não precisa se preocupar sobre esses detalhes.

Ok. Aqui está o que o teorema significa. A reta secante que conecta os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ na Figura 11-12 tem uma inclinação dada pela fórmula da inclinação:

Nota para pessoas persistentes como eu

Em adição à desqualificação das funções estranhas com intervalos e vértices, a exigência da derivada do teorema do valor médio também desqualifica funções perfeitamente sãs como $f(x) = \sqrt[3]{x}$ que tem um ponto de inflexão com uma tangente vertical onde a inclinação e a derivada são indefinidas. Mas o teorema funciona muito bem com esses tipos de funções.

Eu acho estranho que esse esclarecimento não seja mencionado nos livros de cálculo — pelo menos não nos que eu já vi até hoje. O teorema não deveria exigir a derivada; ele deveria exigir um pouco menos — que uma tangente pudesse ser desenhada em qualquer ponto da função em um dado intervalo.

$$\textit{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Note que isso é o mesmo que o lado direito da equação do teorema do valor médio. A derivada em um ponto é a mesma coisa que a inclinação da reta tangente nesse ponto, então o teorema diz apenas que deve haver pelo menos um ponto entre a e b onde a inclinação da tangente seja a mesma que a inclinação da reta secante de a até b.

Por que tem que ser assim? Aqui está um argumento visual. Imagine que você pegue uma reta secante que conecta $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, e depois você a deslize para cima, mantendo-a paralela à reta secante original. Você consegue ver que os dois pontos da interseção entre essa linha deslizante e a função – os pontos que começam em $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ – vão começar a ficar gradualmente mais perto um do outro até que fiquem juntos em $(c, f(c))$? Se você aumentar uma linha pra mais longe, você se solta da função completamente. Nesse último ponto de interseção, $(c, f(c))$, a linha deslizante toca a função em um único ponto e é assim tangente à função nesse lugar, enquanto tem a mesma inclinação que a reta secante original. Bem, é o suficiente. Essa explicação é um pouco simplificada demais, mas vai servir.

Aqui está um tipo de argumento completamente diferente que deve apelar para o seu bom senso. Se a função da Figura 11-12 lhe dá a leitura do indicador de distância do carro como uma função do tempo, então a inclinação da reta secante de a até b lhe dá a velocidade média durante esse intervalo de tempo, porque dividindo a distância viajada, $f(b) - f(a)$, pelo tempo decorrido, $b - a$, você vai ter a velocidade média. O ponto $(c, f(c))$, garantido pelo teorema do valor médio, é um ponto onde a velocidade instantânea – dada pela derivada de $f'(c)$ – é igual à velocidade média.

Agora, imagine que você tenha feito uma viagem e a velocidade média tenha sido de 80 quilômetros por hora. O teorema do valor médio garante que você estava indo a exatamente 80km/h por pelo menos um momento durante sua viagem. Pense sobre isso. Sua velocidade média não pode ser 80km/h se você for a menos de 80km/h em uma parte do caminho e a mais de 80km/h em outras partes. E se você estiver dirigindo a menos de 80km/h em um ponto e a mais de 80km/h em outro ponto (ou vice versa), você terá que alcançar exatamente 80km/h pelo menos uma vez à medida que você acelera (ou freia). Você não pode pular para mais de 80km/h – por exemplo, você está indo a 79km/h em um momento e depois a 81km/h no próximo – porque as velocidades aumentam deslizando pela escala, e não pulando. Então, em algum ponto, seu velocímetro vai deslizar passando de 80km/h, e por pelo menos um instante, você vai estar a exatamente 80km/h. Isso é tudo que o teorema do valor médio diz.

Capítulo 12

Seus Problemas Estão Resolvidos: A Diferenciação ao Resgate!

Neste Capítulo

- Fazendo um bom negócio – problemas de otimização
- Posição, velocidade, e aceleração – VROOOOM
- Taxas relacionadas – preparem-se
- Complicando-se com as tangentes
- Negociando normais
- Alinhando para aproximações lineares
- Lucrando com problemas de administração e economia

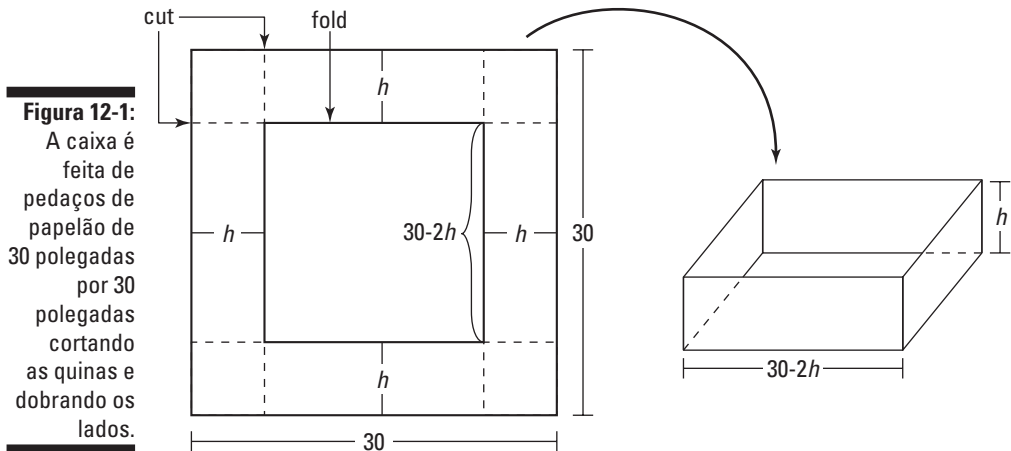
Na introdução, eu argumento que o cálculo tem mudado o mundo de maneiras incontáveis, que o seu impacto não está limitado à Torre de Marfim da matemática, mas que está ao nosso redor em coisas práticas como nos microondas, telefones celulares e carros. Bem, agora estamos no Capítulo 12, e eu estou *finalmente* preparado para mostrar como usar o cálculo para resolver alguns problemas práticos. Antes tarde do que nunca.

Aproveitando o Melhor (ou Pior) da Vida: Problemas de Otimização

Uma das utilidades mais práticas da diferenciação é encontrar valor máximo ou mínimo de funções reais: o output máximo de uma fábrica, a força máxima de um feixe, o tempo mínimo para realizar uma tarefa, o alcance máximo de um míssil, e assim por diante. Eu lhe dou alguns exemplos padrões de geometria agora, e eu retorno a esse tópico no final do capítulo com alguns exemplos administrativos e econômicos.

O volume máximo de uma caixa

Uma caixa sem tampa vai ser manufaturada a partir de um pedaço de papelão de 30 polegadas por 30 polegadas cortado e dobrado como mostrado na Figura 12-1.

Figura 12-1: A caixa é feita de pedaços de papelão de 30 polegadas por 30 polegadas cortando as quinas e dobrando os lados.

Quais são as dimensões que vão produzir uma caixa com o volume máximo? A matemática geralmente parece abstrata e impraticável, mas aqui está um genuíno problema prático. Se um produtor pode vender caixas grandes por mais e está fazendo cem mil caixas, é melhor você acreditar que ele ou ela quer a resposta exata para essa pergunta. Veja aqui como fazer.

1. **Expresse as coisas que você quer maximizar, o volume, como uma função do desconhecido, a altura da caixa (que é a mesma que o comprimento do corte).**

   $V = l \cdot m \cdot h$

   $V(h) = (30 - 2h)(30 - 2h) \cdot h$ (Você pode ver na Figura 12-1 que tanto o *comprimento* como a *largura* são iguais a 30 -2*h*)

   $= (900 - 120h + 4h^2) \cdot h$

   $= 4h^3 - 120h^2 + 900h$

2. **Determine o domínio da sua função.**

   A altura não pode ser negativa ou maior do que 15 polegadas (o papelão tem apenas 30 polegadas de largura, então metade disso é a altura máxima). Assim, valores sensíveis para h são $0 \leq h \leq 15$. Você agora quer encontrar o valor máximo de *V(h)* nesse intervalo. Você usa o método do tópico "Encontrando os valores máximos e mínimos absolutos em um intervalo fechado" no Capítulo 11.

3. **Encontre os números críticos de V (*h*) no intervalo aberto (0,15) colocando a derivada igual a zero e resolvendo. E não se esqueça de verificar os números onde a derivada é indefinida.**

$V(h) = 4h^3 - 120h^2 + 900h$

$V'(h) = 12h^2 - 240h + 900$ (regra da potência)

$0 = 12h^2 - 240h + 900$

$0 = h^2 - 20h + 75$ (dividindo ambos os lados por 12)

$0 = (h - 15)(h - 5)$ *(fatoração trinomial comum)*

$h = 15$ ou 5

Porque 15 não está no intervalo aberto (0,15), ele não é considerado um número crítico (embora este seja um ponto discutível, já que você acaba testando-o abaixo). E porque esta derivada é definida para todos os valores de entrada, não há números críticos adicionais. Portanto 5 é o único número crítico.

4. **Avalie a função no número crítico, 5, e nos pontos finais do intervalo, 0 e 15, para localizar o máximo da função.**

   $Vh = 4h^3 - 120h^2 + 900h$

   $V(0) = 0$

   $V(5) = 2000$

   $V(15) = 0$

O *extremo* (entenda essa palavra sofisticada para *máximo* ou *mínimo*) que você está procurando geralmente não ocorre em um ponto final, mas pode ocorrer– então não falhe em avaliar a função no intervalo dos dois pontos finais.

Então, uma altura de 5 polegadas produz uma caixa com um volume máximo (2000 polegadas cúbicas). Devido ao fato de o comprimento e a largura serem iguais a $30 - 2h$, a altura de 5 dá um comprimento e uma largura de $30 - 2 \cdot 5$, ou 20, e assim as dimensões da caixa desejada são 5" por 20" por 20". É isso.

A área máxima de um curral – yeehaw!

Um fazendeiro tem dinheiro para comprar pode acomodar 300 metros de cerca para fazer um curral que é dividido em dois retângulos iguais. Veja a Figura 12-2.

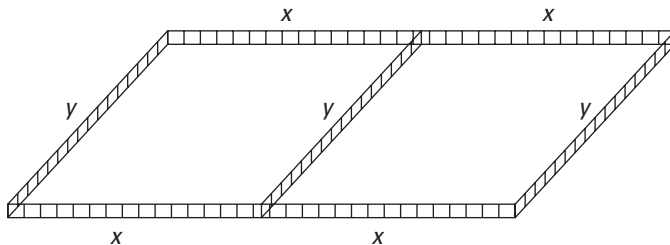



Figura 12-2: Cálculo para cowboys — maximizando um curral.

Quais são as dimensões que vão maximizar a área do curral? Esse é outro problema prático. O fazendeiro quer dar para os seus animais o quanto de espaço for possível dado o comprimento da cerca que ele pode pagar. Como todos os executivos, ele quer fazer um bom negócio.

1a. Expresse o que você quer maximizar, a área, como uma função de duas incógnitas, *x* e *y*.

$$A = l \cdot w$$
$$= (2x)\ (y)$$

No exemplo da caixa de papelão no tópico anterior, você pôde escrever o volume como uma função de uma variável – o que sempre é o que você quer. Mas aqui, a área é uma função de duas variáveis, então o passo 1 tem dois sub-passos adicionais.

1b. Use a informação dada para relacionar essas duas incógnitas.

A cerca é usada para sete seções, assim

$$300 = x + x + x + x + y + y + y$$
$$300 = 4x + 3y$$

1c. Resolva a equação em função de *y* e coloque o resultado no lugar de *y* na equação do passo 1.a. Isso vai lhe dar o que você precisa – uma função com uma variável.

$$4x + 3y = 300$$
$$3y = 300 - 4x$$
$$y = \frac{300 - 4x}{3}$$
$$y = 100 - \frac{4}{3}x$$
$$A = (2x)(y)$$
$$A(x) = (2x)\left(100 - \frac{4}{3}x\right)$$
$$A(x) = 200x - \frac{8}{3}x^2$$

2. Determine o domínio da função.

Você não pode ter um comprimento negativo para a cerca, então *x* não pode ser negativo, e o máximo que *x* pode ser é 300 dividido por 4, ou 75. Assim, $0 \le x \le 75$.

3. Encontre os números críticos de *A*(*x*) no intervalo aberto (0,75) igualando a derivada a zero e resolvendo.

$$A(x) = 200x - \frac{8}{3}x^2$$
$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x \quad \text{(regra da potência)}$$
$$200 - \frac{16}{3}x = 0$$
$$-\frac{16}{3}x = -200$$

$$\begin{aligned} x &= -200 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) \\ &= \frac{600}{16} \\ &= 37{,}5 \end{aligned}$$

Porque A' é definido para todos os valores de x, 37, 5 é o único número crítico.

4. **Avalie a função no número crítico, 37,5, e nos pontos finais do intervalo, 0 e 75.**

$$A(x) = 200x - \frac{8}{3}x^2$$

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(37{,}5) &= 3750 \\ A(75) &= 0 \end{aligned}$$

> **Nota:** Avaliar uma função nos pontos finais de um intervalo fechado é um passo padrão em encontrar o extremo absoluto do intervalo. De qualquer forma, você poderia ter pulado esse passo aqui se tivesse notado que *A(x)* é uma parábola invertida e que, conseqüentemente, seu pico deve ser maior do que qualquer ponto final.

O valor máximo no intervalo é 3750, e assim, um valor de x igual a 37,5 metros maximiza a área do curral. O comprimento é $2x$, ou 75 metros. A largura é y, que é igual a $100 - \frac{4}{3}x$. Inserindo 37,5 você tem $100 - \frac{4}{3}(37{,}5)$, ou 50 metros. Então o fazendeiro vai construir um curral de 75m por 50m com uma área de 3750 metros quadrados.

Ioiô: Posição, Velocidade, e Aceleração

Toda vez que você entra no seu carro, você presencia a diferenciação em primeira mão. Sua velocidade é a derivada primeira da sua posição. E quando você pisa no acelerador ou no freio – acelerando ou desacelerando – você experimenta a derivada segunda.

Se uma função dá a posição de alguma coisa como uma função do tempo, a derivada primeira fornece a velocidade, e a derivada segunda a aceleração. Então, você diferencia a *posição* para ter a *velocidade*, e diferencia a *velocidade* para ter a *aceleração*.

Veja um exemplo. Um ioiô se move em linha reta para cima e para baixo. Sua altura acima do chão, como uma função do tempo, é dada pela função $H(t) = t^3 - 6t^2 + 5t + 30$, onde t está em segundos e *H(t)* está em polegadas.

Em t = 0, o ioiô está a 30 polegadas do chão, e depois de 4 segundos, está a uma altura de 18 polegadas. Veja a Figura 12-3.

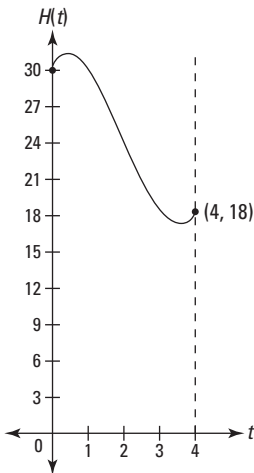



Figura 12-3: A altura do ioiô, de 0 a 4 segundos.

A velocidade, $V(t)$, é a derivada da posição (a altura nesse problema), e a aceleração, $A(t)$, é a derivada da velocidade. Assim –

$H(t) = t^3 - 6t^2 + 5t + 30$

$V(t) = H'(t) = 3t^2 - 12t + 5$ (regra da potência)

$A(t) = V'(t) = H''(t) = 6t - 12$ (regra da potência)

Dê uma olhada nos gráficos dessas três funções na Figura 12-4.

Usando as três funções e seus gráficos, eu quero discutir algumas coisas sobre o movimento do ioiô.

- Altura máxima e mínima
- A velocidade máxima, mínima e média
- O deslocamento total
- Velocidade máxima, mínima e média
- A distância total viajada
- Os períodos de aceleração e desaceleração
- A aceleração máxima e mínima

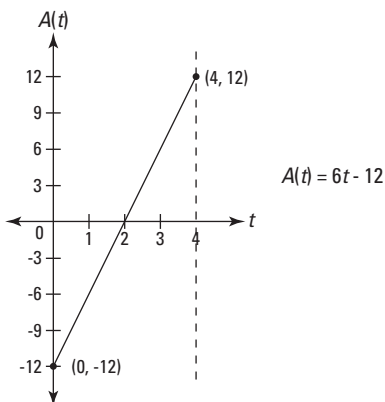
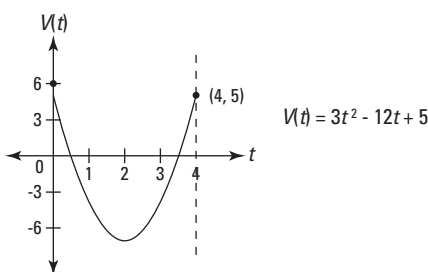
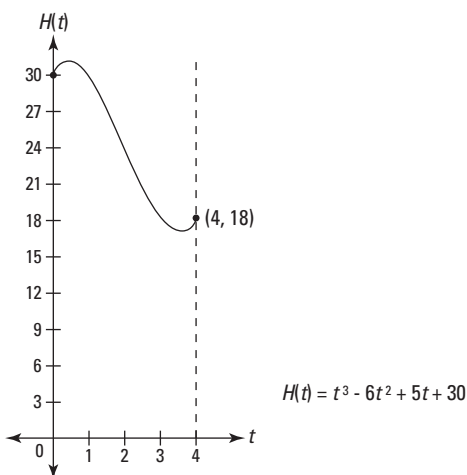



Figura 12-4: Os gráficos das funções da altura, velocidade, e aceleração do ioiô de 0 a 4 segundos.

Visto que é muita coisa para abordar, eu vou ignorar alguns detalhes – como nem sempre verificarei os pontos finais ao procurar pelo extremo se for óbvio que eles não ocorrem nos pontos finais. Você se importa? Eu achei que não (Problemas de posição, velocidade e aceleração usam muitas idéias do Capítulo 11 – valores extremos locais, concavidade, pontos de inflexão – então você talvez queira olhar essas definições de novo caso esteja um pouco confuso). No entanto, antes de lidar com os tópicos nos marcadores, há uma coisa que eu quero discutir – a diferença entre a velocidade e a rapidez (ou celeridade), e a relação delas com a aceleração.

Velocidade versus rapidez ou celeridade)

Nenhum dos seus amigos vai reclamar – ou até mesmo notar – se você usar as palavras "velocidade" e "rapidez" uma no lugar da outra, mas seu amigo matemático *vai* reclamar. Para a função da velocidade na Figura 12-4, o movimento ***para cima*** do ioiô é definido como uma velocidade *positiva*, e o movimento ***para baixo*** como uma velocidade *negativa*. Essa é a forma padrão que a velocidade é lidada na maioria dos problemas de cálculo e de física (Ou, se o movimento for horizontal, indo para *direita* é uma velocidade *positiva* e indo para a *esquerda* é uma velocidade *negativa*).

Rapidez, por outro lado, é sempre positiva (ou zero). Se um carro vai a 50km/h, por exemplo, você diz que a sua rapidez é 50, e você quer dizer 50 *positivo*, não importando se está indo para a direita ou para a esquerda. Para a velocidade, a direção é importante; para a rapidez, não. A rapidez, por um lado, é uma simples idéia da velocidade, apelando para o nosso bom senso, mas é singular no cálculo porque não se encaixa bem no esquema das três funções mostrado na Figura 12-4.

Você tem que ter em mente a distinção entre a velocidade e a rapidez ao analisar a velocidade e a aceleração. Por exemplo, se um objeto está descendo (ou indo para a esquerda) cada vez mais rápido, sua rapidez está aumentando, mas sua velocidade está *diminuindo* porque a velocidade está ficando cada vez *mais negativa* (e negativos grandes são números pequenos). Isso pode parecer estranho, mas é assim que funciona. E aqui está outra coisa estranha. A aceleração é definida como a taxa de mudança da velocidade, e não da rapidez. Então, se um objeto está diminuindo a velocidade enquanto segue para baixo, e assim tem uma velocidade *crescente* – porque a velocidade está ficando cada vez mais um negativo pequeno – o objeto tem uma aceleração *positiva*. Você vê o objeto diminuindo a velocidade, mas você diz que está acelerando em vez de desacelerando. Eu posso continuar com isso, mas eu aposto que você já agüentou muito.

A altura máxima e mínima

O máximo e mínimo de *H(t)* ocorre nos valores extremos locais que você pode ver na Figura 12-4. Para localizá-los, iguale a derivada de *H(t)*, isto é *V(t)*, a zero e resolva.

$$V(t) = H'(t) = 3t^2 - 12t + 5$$

$$0 = 3t^2 - 12t + 5$$

$$t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(5)}}{2 \cdot 3} \quad \text{(fórmulas quadráticas)}$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{84}}{6}$$

$$t = \frac{12 \pm 2\sqrt{21}}{6}$$
$$t = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{3}$$
$$= \sim 0{,}47 \text{ ou } \sim 3{,}53$$

Esses dois números são os zeros de *V(t)* e as coordenadas de *t*, isto é das coordenadas do *tempo*, do máximo e mínimo de *H(t)*, que você pode ver na Figura 12-4. Em outras palavras, esses são os *tempos* quando o ioiô alcança sua altura máxima e mínima. Insira esses números em *H(t)* para obter as alturas:

$$H(0{,}47) \approx 31{,}1$$
$$H(3{,}53) \approx 16{,}9$$

Então o ioiô chega a uma altura máxima de mais ou menos 31,1 polegadas acima do chão em $t \approx 0{,}47$ segundos e cai a mais ou menos 16,9 polegadas em $t \approx 3{,}53$ segundos.

Velocidade e deslocamento

Como eu expliquei no tópico "Velocidade versus rapidez (ou celeridade)", a *velocidade* é basicamente como a *rapidez* exceto que a rapidez é sempre positiva, mas descendo (ou indo para esquerda) é uma velocidade *negativa*. A relação entre *deslocamento* e *distância viajada* é similar: a distância viajada é sempre positiva, mas descendo (ou indo para a esquerda) conta como um deslocamento *negativo*. A ideia básica é essa: se você dirige da sua casa para uma loja que está a 1 quilômetro de distância – passando no caixa eletrônico e marcando 3 quilômetros no seu hodômetro – sua distância viajada total é 3 quilômetros, mas seu deslocamento é de apenas 1 quilômetro.

Deslocamento total

O deslocamento total é definido como a posição final menos a posição inicial. Então, devido ao fato de o ioiô começar de uma altura de 30 e terminar a uma altura de 18,

$$\textit{Deslocamento total} = 18 - 30 = -12$$

Isso é negativo porque o movimento líquido é *para baixo*.

Velocidade média

A velocidade média é dada pelo deslocamento total dividido pelo tempo decorrente. Assim,

$$\textit{Velocidade média} = -\frac{12}{4}$$
$$= -3$$

Isso diz a você que o ioiô está, em média, *descendo* 3 polegadas por segundo.

Velocidade máxima e mínima

Para determinar a velocidade máxima e mínima do ioiô durante o intervalo de 0 a 4 segundos, iguale a derivada de *V(t)*, isto é *A(t)*, a zero e resolva:

$$V'(t) = A(t) = 6t - 12$$
$$6t - 12 = 0$$
$$6t = 12$$
$$t = 2$$

Olhe novamente a Figura 12-4. Em *At* $t = 2$, você tem o zero de *A(t)*, o valor mínimo local de *V(t)*, e o ponto de inflexão de *H(t)*. Mas você já sabia disso, certo? (Se não, dê uma olhada no Capítulo 11).

Agora, avalie V(t) no número crítico, 2, e nos pontos finais do intervalo, 0 e 4:

$$V(0) = 5$$
$$V(2) = -7$$
$$V(4) = 5$$

Assim, o ioiô tem uma velocidade máxima de 5 *polegadas por segundo* duas vezes – no começo e no final do intervalo. Ele alcança a velocidade mínima de -7 *polegadas por segundo* em $t = 2$ segundos.

Rapidez e distância viajada

Ao contrário da *velocidade* e *deslocamento*, que têm definições técnicas, *rapidez* e *distância viajada* têm significados de bom senso. Rapidez, é claro, é o que você lê no seu velocímetro, e você pode ler a distância viajada no seu hodômetro ou no seu "hodômetro parcial" depois de ajustar para zero.

Distância total viajada

Para determinar a distância total, some as distâncias viajadas em cada parte da viagem do ioiô: a parte para cima, para baixo, e a segunda parte para cima.

Primeiramente, o ioiô sobe a partir de uma altura de 30 polegadas até 31,1 polegadas (onde o primeiro ponto de meia-volta está). Essa é uma distância de mais ou menos 1,1 polegadas. Depois, ele desce de mais ou menos 31,1 para mais ou menos 16,9 (a altura do segundo ponto de meia-volta). Isso é uma distância de 31,1 menos 16,9, ou mais ou menos 14,2 polegadas. Finalmente, o ioiô sobe de novo a partir de mais ou menos 16,9 polegadas para sua altura final de 18 polegadas. Isto são outras 1,1 polegadas. Some essas três distâncias para obter a distância total viajada: $\sim 1{,}1 + \sim 14{,}2 + 1{,}1 \approx 16{,}4$ polegadas.

Rapidez média

A rapidez média do ioiô é dada pela distância total viajada dividida pelo tempo decorrido. Assim,

$$\textit{Rapidez média} \approx \frac{16{,}4}{4}$$
$$\approx 4{,}1 \textit{ polegadas por segundo}$$

Rapidez máxima e mínima

Você determinou previamente a velocidade máxima do ioiô (5 *polegadas por segundo*) e sua velocidade mínima (-7 *polegadas por segundo*). A velocidade de -7 é uma rapidez de 7, então essa é a rapidez máxima do ioiô. Sua rapidez mínima de zero ocorre nos dois pontos de mudança de direção.

Para uma função da *velocidade* contínua, a *rapidez mínima* é zero toda vez que as velocidades, máxima e mínima, forem de sinais opostos ou quando uma delas for zero. Quando as velocidades, máxima e mínima, forem ambas positivas ou ambas negativas, então a rapidez *mínima* é o *menor* dos valores absolutos das velocidades máxima e mínima. Em todos os casos, a rapidez *máxima* é o *maior* dos valores absolutos das velocidades máxima e mínima.

Cantando pneu e marcas de derrapagem: Aceleração e desaceleração

Não se esqueça que para o cálculo a *aceleração* e a *desaceleração* têm definições técnicas, não as que você está acostumado – veja a discussão dessas definições no tópico "Velocidade versus rapidez (ou celeridade)".

Períodos de aceleração e desaceleração

Você pode ver de imediato os períodos de aceleração e desaceleração no gráfico de $A(t)$ na Figura 12-4. Onde $A(t)$ é negativo – de $t = 0$ até $t = 2$ – isto é uma aceleração negativa, ou uma desaceleração, o que significa que a velocidade está diminuindo. Onde $A(t)$ é positivo – de $t = 2$ até $t = 4$ – você tem aceleração, o que significa que a velocidade está aumentando. Quando t é exatamente 2, $A(t)$ é zero, então não há nem aceleração e nem desaceleração – a velocidade, somente por esse instante, é constante.

Aceleração máxima e mínima

Usando o cálculo para determinar a aceleração máxima e mínima pode parecer inútil quando você pode simplesmente olhar o gráfico de $A(t)$ e ver que a aceleração mínima de -12 ocorre na extrema esquerda quando $t = 0$, e que a aceleração então sobe para o seu máximo de 12 na extrema direita quando $t = 4$. Mas não é inconcebível que você tenha um daqueles professores de cálculo extremamente exigente que tem a petulância de exigir que você realmente faça os cálculos e mostre o seu trabalho – então seja forte e faça.

Para encontrar a aceleração máxima e mínima de $t = 0$ até $t = 4$, iguale a derivada de $A(t)$ a zero e resolva:

$$A(t) = 6t - 12$$
$$A'(t) = 6$$
$$0 = 6$$

O que diabos significa segundo ao quadrado?

Note que eu uso a unidade $\frac{\text{centimetros por segundo}}{\text{segundo}}$ para a aceleração em vez da unidade equivalente, porém estranha, centímetros/segundo2. Você geralmente vê a aceleração dada em termos da distância dividida por segundo2. Mas que diabos é segundo2? É sem sentido, e algo do tipo metros/segundo2 é uma péssima maneira de pensar sobre a aceleração. A melhor maneira de entender a aceleração é como a mudança da rapidez por unidade de tempo. Se um carro pode ir de 0 até 60*km/h* em 6 segundos, ou, em média, 10*km/h* em cada segundo — isto é uma aceleração de $\frac{\text{10 km/h}}{\text{segundo}}$. É um pouco mais confuso quando a rapidez tem uma unidade do tipo *metros/segundo* e a unidade de tempo para a aceleração também é *segundo*, porque assim a palavra segundo aparece duas vezes. Mas ela ainda funciona como o exemplo do carro. Digamos que um objeto comece parado e aumente a velocidade até 10 metros/segundo depois de 1 segundo, depois para 20 metros/segundo depois de 2 segundos, para 30 metros/segundo depois de 3 segundos, e assim sucessivamente. Sua rapidez está aumentando 10 metros/segundo a cada segundo e isto é uma aceleração de 10 $\frac{\text{metros por segundo}}{\text{segundo}}$ ou $\frac{\text{metros/segundo}}{\text{segundo}}$. É útil escrever a unidade da aceleração em qualquer uma dessas maneiras como a rapidez sobre a unidade do tempo — em vez de 10 metros por segundo *por* segundo ou 10 metros/segundo/segundo — para enfatizar que a aceleração é uma mudança na rapidez por unidade de tempo. Pense na aceleração dessa maneira, e não no absurdo segundo2.

Essa equação, é claro, não tem solução, então não há números críticos e assim o extremo absoluto deve ocorrer nos pontos finais do intervalo, 0 e 4.

$$A(0) = 6 \,.\, 0 - 12$$

$$= -12 \frac{\textit{centímetro por segundo}}{\textit{segundo}}$$

$$A(4) = 6 \,.\, 4 - 12$$

$$= 12 \frac{\textit{centímetro por segundo}}{\textit{segundo}}$$

Você encontra as respostas que já sabia

Amarrando tudo junto

Note as seguintes ligações entre os três gráficos na Figura 12-4. A seção *negativa* no gráfico de $A(t)$ – de t = 0 até t = 2 – corresponde à seção *decrescente* no gráfico de $V(t)$ e à seção com *concavidade para baixo* do gráfico de $H(t)$. O intervalo *positivo* no gráfico de $A(t)$ – de t = 2 até t = 4 – corresponde ao intervalo *crescente* no gráfico de $V(t)$ e ao intervalo com *concavidade para cima* no gráfico de $H(t)$. Quando t = 2 segundos, $A(t)$ tem um *zero*, $V(t)$ tem um valor local *mínimo*, e $H(t)$ tem um ponto de inflexão.

Taxas Relacionadas – Elas Avaliam, Relativamente

Digamos que você esteja enchendo sua piscina e você saiba a velocidade que a água está saindo da mangueira, e você queira calcular a velocidade de subida do nível da água na piscina. Você conhece uma taxa (a velocidade que a água está sendo jogada na piscina), e você quer determinar a outra taxa (a velocidade de subida do nível da água). Essas taxas são chamadas se *taxas relacionadas* porque uma depende da outra – quanto mais rápido a água for jorrada dentro da piscina, mas rápido o nível da água vai aumentar. Em um problema típico de taxas relacionadas, a taxa ou taxas dadas são constantes, mas a taxa que você quer descobrir está mudando com o tempo. Você tem que determinar essa taxa em um ponto do tempo em particular.

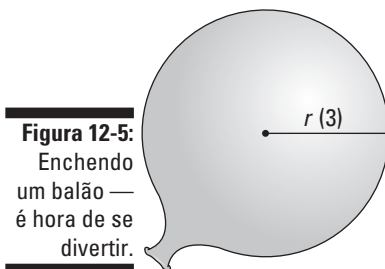
Resolver esses problemas, a princípio, pode ser difícil, mas com a prática você vai ficando por dentro das coisas. As estratégias e dicas que eu discuto são de grande ajuda. Agora para três exemplos.

Enchendo um balão

Você está enchendo um balão a uma taxa de 300 *centímetros cúbicos por minuto*. Quando o raio do balão atinge 3 centímetros, qual a velocidade de crescimento do raio?

1. **Desenhe um diagrama, classificando o diagrama com qualquer medida *constante* (não há nenhuma nesse extraordinário problema simples) e tenha certeza de designar uma variável para qualquer coisa no problema que esteja *mudando* (a não ser que seja irrelevante para o problema). Veja a Figura 12-5.**

r (3)

Figura 12-5: Enchendo um balão — é hora de se divertir.

Note que o raio da Figura 12-5 está classificado como a variável r. O raio precisa de uma variável porque à medida que o balão é enchido, o raio *muda*. Eu coloquei o 3 entre parênteses para enfatizar que o número 3 *não* é uma medida constante. O problema pede que você determine algo *quando* o raio é de 3 centímetros, mas lembre-se, o raio está constantemente mudando.

Em problemas de taxas relacionadas, é importante distinguir entre o que está mudando e o que *não* está mudando.

O volume do balão também está mudando, então você precisa de uma variável para o volume, *V*. Você poderia colocar o *V* no seu diagrama para indicar o volume mutável, mas não há nenhuma maneira fácil de marcar parte do balão com o *V* como você pode mostrar o raio com um *r*.

2. **Liste todas as taxas dadas e a taxa que você quer determinar como derivadas em relação ao tempo.**

   Você está inflando o balão a 300 *centímetros cúbicos por minuto*. Essa é uma taxa – é uma mudança no volume (centímetros cúbicos) por mudança no tempo (minutos). Então,

   $$\frac{d}{dt} = 300 \text{ centímetros cúbicos por minuto}$$

   Você tem que descobrir a velocidade de mudança do raio, então

   $$\frac{dr}{dt} = ?$$

3. **Escreva a fórmula que conecta as variáveis do problema, *V* e *r*.**

   Aqui está a fórmula para o volume da esfera:

   $$V = \frac{4}{3} = \pi r^3$$

4. **Diferencie sua fórmula em relação ao tempo, *t*.**

   Isso funciona como uma diferenciação implícita porque você está diferenciando em relação a *t*, mas a fórmula é baseada em outra coisa, a saber, *r*.

   $$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \,.3r^2 \frac{dr}{dt}$$
   $$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

   Você obtém um $\frac{dr}{dt}$, assim como um *y'* ou um $\frac{dy}{dx}$ com a diferenciação implícita.

5. **Substitua os valores conhecidos para a taxa e as variáveis na equação do passo 4, e depois resolva o que você quer determinar.**

   É dado que $\frac{dV}{dt} = 300$, e pedem que você descubra $\frac{dr}{dt}$ quando $r = 3$,

   então insira esses números e resolva em função de $\frac{dr}{dt}$.

Tenha certeza de diferenciar (passo 4) *antes* de inserir a informação dada nas incógnitas (passo 5).

$$300 = 4\pi \cdot 3^2 \frac{dr}{dt}$$

$$300 = 36\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{300}{36\pi} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = 2{,}65 \textit{ centímetros por minuto}$$

Assim o raio está aumentando a uma taxa de mais ou menos 2,65 *centímetros por minuto* quando o raio mede 3 centímetros. Pense em todos os balões que você encheu desde a sua infância. Agora você finalmente tem uma resposta para a questão que vem te incomodando ao longo de todos esses anos.

A propósito, se você colocar 5 no lugar de r em vez de 3, você obtém uma resposta de mais ou menos 0,95 *centímetros por minuto*. Isso deve concordar com a experiência do enchimento do balão – quanto maior fica o balão, mais devagar ele aumenta. É uma boa idéia verificar coisas desse tipo de vez em quando para ver se a matemática concorda com o seu bom senso.

Enchendo uma calha

Aqui está um problema básico de taxa relacionada. Uma calha está sendo enchida com alimentos para porcos. Ela tem 3 metros de comprimento, e seu corte transversal é um triângulo isósceles com uma base de 60 centímetros e uma altura de 80 centímetros (com o vértice em baixo, é claro). A comida está sendo derramada a uma taxa de 90 decímetros *cúbicos por minuto (ou 90 litros por minuto)*. Quando a profundidade da comida for de 40 centímetros?

1. **Desenhe o diagrama, classificando o diagrama com qualquer medida *constante* e designando variáveis para qualquer coisa *mutável*. Veja a Figura 12-6.**

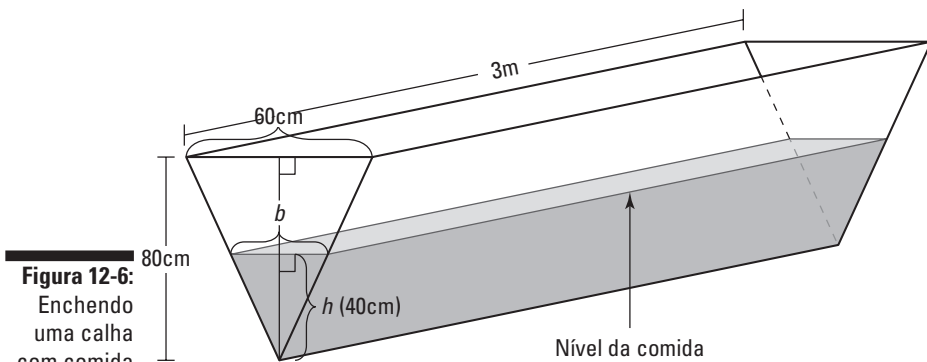



Figura 12-6: Enchendo uma calha com comida — hora do almoço.

Note que a Figura 12-6 mostra as dimensões *constantes* da calha, 60 centímetros, 80 centímetros, e 3 metros, e que essas dimensões não têm nomes com variáveis como c para comprimento ou h para altura. E note que as coisas *mutáveis* – a altura (ou profundidade) da comida e a largura da superfície da comida (que fica cada vez mais larga à medida que a comida fica mais profunda) – têm nomes com variáveis, h para altura e b para base (eu chamo de *base* em vez de *largura* porque é a base de um triângulo de cabeça para baixo formado pela comida). O volume da comida também está mudando, então você pode chamar isso de V, é claro.

2. **Liste todas as taxas dadas e a taxa que você quer determinar como derivadas em relação ao tempo.**

$$\frac{dV}{dt} = 5 \textit{ litros por minuto}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

3.a. **Escreva a fórmula que conecta as variáveis do problema, *V*, *b* e *h*.**

Eu estou *absolutamente certo* que você se lembra da fórmula para o volume de um prisma reto (o formato da comida na calha):

$$V = (\textit{área da base})\ (\textit{altura})$$

Note que essa "base" é a base do prisma (que é o triângulo de base b e altura h no final da calha), e não apenas a base do triângulo que está classificada como b na Figura 12-6. Também, essa "altura" é a altura do prisma (o comprimento da calha), e não a altura classificada como h na Figura 12-6. Desculpe a confusão. Lide com isto.

A área da base triangular é igual a $\frac{1}{2}bh$ e a "altura" do prisma é de 3 metros, ou 30 decímetros, então a fórmula fica:

$$V = \frac{1}{2}bh \cdot 30$$

$$V = 15bh$$

Agora, ao contrário da fórmula no exemplo do balão, essa fórmula contém uma variável, b, que você não vê na lista de derivadas no passo 2. Então o passo 3 tem uma segunda parte – se livrar dessa variável extra.

3.b. **Encontre uma equação que relaciona a variável não desejada, *b*, a alguma outra variável do problema para que você possa fazer a substituição que lhe deixe apenas com *V* e *h*.**

A face triangular da comida na calha é *parecida* com a face triangular da própria calha, então a base e a altura desses triângulos são proporcionais (Lembre-se que na geometria esses triângulos semelhantes são triângulos de mesmo formato; seus lados são proporcionais). Assim,

$$\frac{b}{60} = \frac{h}{80}$$

$$80b = 60h \text{ (multiplicação cruzada)}$$

$$b = \frac{60h}{80}$$

$$b = \frac{3h}{4}$$

Triângulos semelhantes aparecem bastante em problemas de taxas relacionadas. Procure por eles toda vez que o problema envolver um triângulo, um prisma triangular ou um cone.

Agora substitua b por $3/4h$ na fórmula do passo 3.a.

$$V = 15bh$$

$$V = 15 \cdot \frac{3}{4}h \cdot h$$

$$V = \frac{45}{4}h^2$$

4. Faça a diferenciação dessa equação em relação a *t*.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{45}{4}h\frac{dh}{dt}$$

5. Substitua os valores conhecidos para a taxa e as variáveis na equação do passo 4, e depois resolva.

Você sabe que $\frac{dV}{dt} = 90$ *litros por minuto*, e você quer determinar $\frac{dh}{dt}$ quando h for igual a 40 centímetros, ou 4 decímetros, então insira 90 e 4 e resolva em relação a $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{45}{4}h\frac{dh}{dt}$$

$$90 = \frac{45}{4} \cdot 4 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$90 = 45 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} \approx 2 \text{ decímetros por minuto}$$

É isso. O nível de comida está aumentando a uma velocidade de 20 centímetros *por minuto* quando a comida está a 40 centímetros de profundidade. Mãos a obra.

Aperte o cinto de segurança: Você está se aproximando do cruzamento do cálculo

Pronto para outro problema comum de taxa relacionada? Um carro sai de um cruzamento viajando rumo ao norte a 50*km/h*, outro está dirigindo

rumo a oeste em direção ao cruzamento a 40*km/h*. Em um ponto, o carro rumo ao norte está a três décimos de milha ao norte do cruzamento e o carro rumo a oeste está a quatro décimos de milha a oeste do cruzamento. Nesse ponto, qual a velocidade de mudança da distância entre os carros?

1. Use a idéia do diagrama. Veja a Figura 12-7.

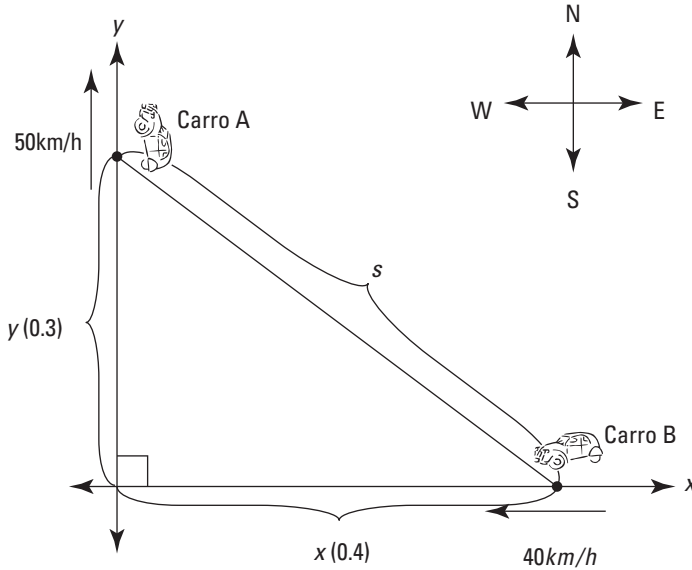



Figura 12-7: Cálculo — é uma viagem dentro do país.

Antes de continuar com o problema, eu quero mencionar um problema semelhante com o qual você pode se deparar se estiver usando um livro padrão de cálculo. Ele envolve uma escada apoiada contra uma parede e deslizando contra a parede. Você consegue ver que o diagrama para esse tipo de problema sobre uma escada seria muito parecido com a Figura 12-7, exceto que o eixo *y* representaria a parede, o eixo *x* seria o chão, e a reta diagonal seria a escada? Esses problemas são um pouco semelhantes, mas há uma diferença importante. A distância entre os carros está *mudando,* assim a reta diagonal na Figura 12-7 está classificada com a variável, *s*. A escada, por outro lado, tem um comprimento *fixo*, então a reta diagonal no seu diagrama para o problema da escada seria classificada com um número, não uma variável.

2. Liste todas as taxas dadas e a taxa desconhecida.

$$\frac{dy}{dt} = 50$$

$$\frac{dx}{dt} = -40$$

$$\frac{ds}{dt} = ?$$

$\frac{dx}{dt}$ é *negativa* porque o carro B está indo para a *esquerda*, na direção do *x* negativo.

3. Escreva a fórmula que relaciona as variáveis do problema: *x*, *y*, e *s*.

Há um triângulo retângulo no seu diagrama, então você usa o Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Para esse problema, x e y são os catetos do triângulo retângulo e s é a hipotenusa, assim $x^2 + y^2 = s^2$.

O teorema de Pitágoras é muito usado em problemas de taxa relacionada. Se houver um triângulo retângulo no seu problema, é bem provável que $a^2 + b^2 = c^2$ seja a fórmula que você vai precisar.

Devido ao fato de a fórmula conter as variáveis x e y, e s, as quais aparecem na sua lista de derivadas no passo 2, você não tem que ajustar essa fórmula como fez no problema da calha.

4. Faça a diferenciação em relação a t.

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$ (diferenciação implícita com a regra da potência)

5. Substitua e resolva em função de $\frac{ds}{dt}$.

$$x = 0{,}4,\ y = 0{,}3,\ \frac{dx}{dt} = -40,\ \frac{dy}{dt} = 50, \text{ e } s = \ldots$$

"Santa falta de distância desprovida de comprimento, Batman – como podemos resolver em função de $\frac{ds}{dt}$ a menos que tenhamos valores para o resto das incógnitas na equação?"

"Tome uma pílula calmante, Robin – apenas use o Teorema de Pitágoras de novo".

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} s^2 &= 0{,}4^2 + 0{,}3^2 \\ &= 0{,}16 + 0{,}09 \\ &= 0{,}25 \\ s^2 &= \pm\, 0{,}5 \end{aligned}$$ (tirando a raiz quadrada de ambos os lados)

Você pode rejeitar a resposta negativa porque s tem obviamente um comprimento positivo. Então $s = 0{,}5$.

Agora insira tudo na sua equação.

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2\ .0{,}5\frac{ds}{dt} = 2 \cdot 0.4 \cdot (-40) + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 50$$

$$1 \cdot \frac{ds}{dt} = -32 + 30$$

$$\frac{ds}{dt} = -2$$

Essa resposta negativa significa que a distância, s, está diminuindo. Assim, quando o carro A está a 3 quadras ao norte do cruzamento e o carro B está a 4 quadras a oeste do cruzamento, a distância entre eles está diminuindo a uma taxa de $2 km/h$.

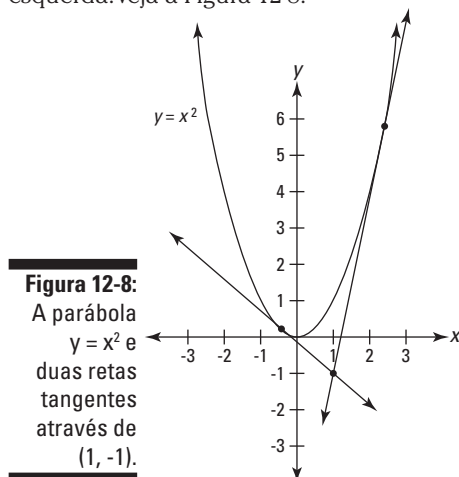
Tangentes e Normais: Conectadas Intimamente

A esta altura você sabe com o que uma reta tangente a uma curva se parece – se não, um de nós dois ou os dois definitivamente deixaram a bola cair. Uma reta *normal* é simplesmente uma reta perpendicular à reta tangente em um ponto de tangência. Problemas envolvendo tangentes e normais são aplicações comuns da diferenciação.

O problema da tangente

Eu aposto que houve muitas vezes, apenas no mês passado, que você quis determinar a localização de uma reta através de um dado ponto, isto é, tangente a uma dada curva. Aqui está como se faz.

Determine os pontos de tangência dessas linhas através do ponto (1, -1) que são tangentes à parábola $y = x^2$. Se você desenhar o gráfico da parábola e inserir o ponto, você pode ver que há duas maneiras de desenhar a reta tangente de (1, -1): para cima à direita e para cima à esquerda. Veja a Figura 12-8.

Figura 12-8: A parábola $y = x^2$ e duas retas tangentes através de (1, -1).

O segredo desse problema está no significado da derivada: A derivada de uma função em um dado ponto é a inclinação da reta tangente a esse ponto. Assim, tudo o que você tem a fazer é igualar a derivada da parábola à inclinação das linhas tangentes e resolver.

1. **Posto que a equação da parábola seja $y = x^2$, você pode pegar um ponto comum na parábola, (x,y), e substitua x^2 por y.**

   Assim, classifique os dois pontos de tangência $(x,\ x^2)$.

2. **Ache a derivada da parábola.**

   $$y = x^2$$

   $$y' = 2x$$

3. **Usando a fórmula da inclinação, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, estabeleça a inclinação de cada reta tangente de (1,-1) até $(x,\ x^2)$, que é $2x$, e resolva em função de x.**

   A propósito, a matemática que você usa para fazer esse passo talvez faça mais sentido se você pensar nela como aplicável para apenas uma das retas tangentes – digamos a que sobe para a direita – mas, na verdade, a matemática se aplica para ambas as retas tangentes simultaneamente:

   $$\frac{x^2 - (-1)}{x - 1} = 2x$$

   $$x^2 - (-1) = 2x\,(x - 1)$$

   $$x^2 + 1 = 2x^2 - 2x$$

   $$0 = x^2 - 2x - 1$$

   $$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2 \cdot 1} \text{ (fórmula quadrática)}$$

   $$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

   $$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

   $$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

   $$= 1 \pm \sqrt{2}$$

   Assim, as coordenadas x dos pontos de tangência são $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$.

4. **Insira cada uma dessas coordenadas x em $y = x^2$ para obter as coordenadas y.**

   $$y = (1 + \sqrt{2})^2$$

   $$= 1 + 2\sqrt{2} + 2$$

   $$= 3 + 2\sqrt{2}$$

   $$y = (1 - \sqrt{2})^2$$

   $$= 1 - 2\sqrt{2} + 2$$

   $$= 3 - 2\sqrt{2}$$

   Assim, os pontos de tangência são $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$, ou mais ou menos (2.4, 5.8) e (-0.4, 0.2).

O problema da reta normal

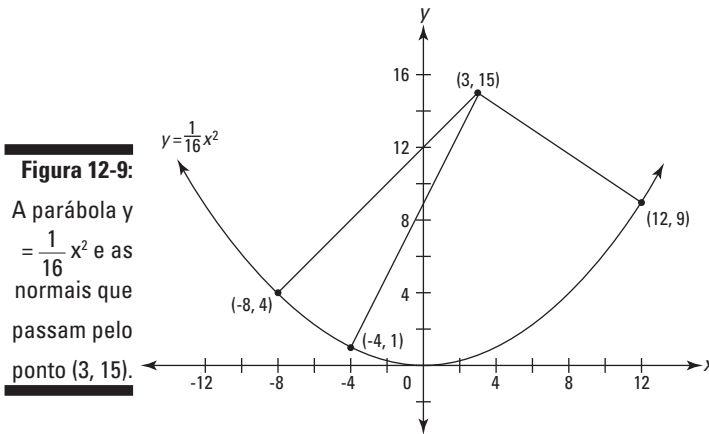
Aqui está o problema companheiro do problema da tangente no tópico anterior. Encontre os pontos de perpendicularidade para todas as retas normais à parábola, $y = \frac{1}{16}x^2$, que passam pelo ponto (3,15).

Uma reta *normal* a uma curva em um dado ponto é a reta perpendicular à reta que é tangente no mesmo ponto.

Desenhe o gráfico da parábola e insira o ponto (3,15). Agora, antes de fazer as contas, tente aproximar os locais de todas as retas normais. Quantas você pode ver? É muito fácil de ver isso, começando em (3,15), uma reta normal desce suavemente para a direita e outra desce um pouco inclinada em direção à esquerda. Mas você encontrou a terceira que está entre essas duas? Não se preocupe se você não viu essa reta porque quando você fizer as contas, você vai obter as três soluções.

Ao fazer o cálculo, aliás, qualquer conta, sugira uma estimativa aproximada e use o bom senso e faça estimativas da solução do problema antes de fazer as contas para o problema antes de fazer as contas (quanto possível e o tempo permitir). Isso aprofunda seu entendimento dos conceitos envolvidos e fornece uma verificação para a solução matemática.

A Figura 12-9 mostra a parábola e as três retas normais.

Figura 12-9: A parábola $y = \frac{1}{16}x^2$ e as normais que passam pelo ponto (3, 15).

Olhando para a Figura 12-9, você pode apreciar a praticidade desse problema. Ele vai ser útil se você por acaso se vir parado dentro de uma curva de uma parede parabólica e quiser saber o local exato desses três pontos na parede onde você possa jogar uma bola e fazer com que ela volte em linha reta para você.

A solução é muito semelhante à solução do problema da tangente, exceto que nesse problema você usa a regra para linhas perpendiculares:

As inclinações de retas *perpendiculares* são *recíprocos opostos*.

Cada linha normal na Figura 12-9 é perpendicular à reta tangente desenhada no ponto onde a normal se encontra com a curva. Assim, a inclinação de cada reta normal é o recíproco oposto da inclinação da tangente correspondente – que, é claro, é dado pela derivada. Então aqui vai.

1. **Pegue um ponto qualquer, (x, y), na parábola $y = \frac{1}{16}x^2$, e substitua y por $\frac{1}{16}x^2$.**

   Então, classifique cada ponto de perpendicularidade $\left(x, \frac{1}{16}x^2\right)$.

2. **Ache a derivada da parábola.**

   $$y = \frac{1}{16}x^2$$
   $$y' = \frac{1}{8}x$$

3. **Usando a fórmula da inclinação, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, estabeleça a inclinação de cada reta normal de (3, 15) até $(x, \frac{1}{16}x^2)$ igual ao recíproco oposto da derivada em $x, \frac{1}{16}x^2$, e resolva em função de x.**

   $$\frac{\frac{1}{16}x^2 - 15}{x - 3} = -\frac{8}{x}$$ (o recíproco oposto de $\frac{1}{8}x$ ou $\frac{x}{8}$ ou $-\frac{8}{x}$)

   $$\frac{1}{16}x^3 - 15x = -8x + 24$$ (fazendo a multiplicação cruzada e distribuindo)

   $$x^3 - 112x - 384 = 0$$ (trazendo todos os termos para um lado e multiplicando ambos os lados por 16)

   Agora, não há nenhuma maneira automática para obter resultados exatos para essa equação cúbica (3° grau) como a fórmula quadrática que lhe dá as soluções para a equação de 2° grau. Em vez disso, você pode desenhar o gráfico de $y = x^3 - 112x - 384$ e as interseções em x vão lhe dar as soluções, mas com esse método não há garantia de que você vai obter soluções exatas (Geralmente, soluções aproximadas são o melhor que você pode fazer com equações cúbicas). Aqui, no entanto,

você teve sorte – na verdade eu tive algo a ver com isso – e obteve as soluções exatas de –8, –4, e 12.

4. Insira cada uma dessas coordenadas x em $y = \frac{1}{16}x^2$ para obter as coordenadas y.

$$y = \frac{1}{16}(-8)^2 =$$
$$= 4$$

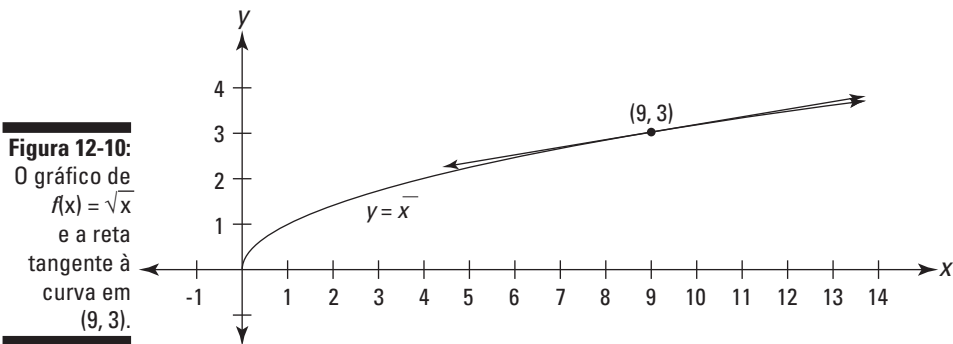
$$y = \frac{1}{16}(-4)^2 =$$
$$= 1$$

$$y = \frac{1}{16}(12)^2 =$$
$$= 9$$

Assim, os três pontos de normalidade são (–8, 4), (–4, 1), e (12, 9) – vamos jogar!

Atirando em Linha Reta com Aproximações Lineares

Pelo fato de as funções comuns serem localmente *lineares* (isto é, em linha reta) – e quanto mais você as amplia, mais retas elas ficam – uma reta tangente a uma função é uma boa aproximação da função perto do ponto de tangência. A Figura 12-10 mostra o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e uma reta tangente à função no ponto (9,3). Você pode ver que perto de (9,3), a curva e a reta tangente são virtualmente indistinguíveis.

Figura 12-10: O gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e a reta tangente à curva em (9, 3).

Determinar a equação dessa reta tangente é fácil. Você tem um ponto, (9, 3), e a inclinação é dada pela derivada de *f* em 9:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$= x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{(regra da potência)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}}$$
$$= \frac{1}{6}$$

Agora apenas pegue essa inclinação, $\frac{1}{6}$, e o ponto (9, 3), e coloque-os na forma ponto-inclinação:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$$
$$y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$$

Essa é a equação da reta tangente para $f(x) = \sqrt{x}$ em (9, 3). Eu suponho que você talvez esteja pensando por que eu escrevi a equação como $y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$. Pode parecer mais natural colocar o 3 à direita de $\frac{1}{6}(x - 9)$, que, é claro, também estaria correto. E eu poderia ter simplificado mais a equação, escrevendo na forma $y = mx + b$. Eu explico mais tarde nesse tópico por que eu escrevi da maneira que fiz – não me apresse.

Se você tiver a sua calculadora gráfica próxima, faça o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e da reta tangente. Amplie algumas vezes o ponto (9, 3), e você verá que a curva fica cada vez mais reta e que a curva e a reta tangente se aproximam cada vez mais.

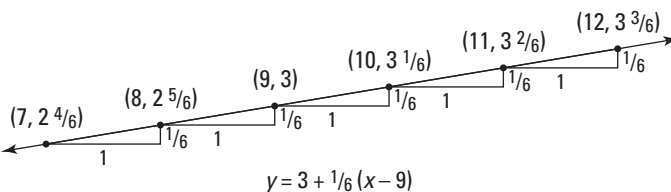
Agora, digamos que você queira aproximar a raiz quadrada de 10. Posto que 10 seja bem perto de 9, e pelo fato de você poder ver na Figura 12-10 que $f(x)$ e sua tangente estão perto uma da outra em $x = 10$, a coordenada y da linha em $x = 10$ é uma boa aproximação do valor da função em $x = 10$, a saber, $\sqrt{10}$.

Apenas coloque o 10 na equação da reta para sua aproximação:

$$y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$$
$$y = 3 + \frac{1}{6}(10 - 9)$$
$$= 3 + \frac{1}{6}$$
$$= 3\frac{1}{6}$$

Assim, a raiz quadrada de 10 é mais ou menos $3\frac{1}{6}$. Isso é mais ou menos só 0,004 maior que a resposta exata de 3,1623... O erro é aproximadamente um décimo de um por cento.

Agora eu posso explicar por que eu escrevi a equação para a reta tangente da maneira que fiz. Essa forma faz o cálculo ficar mais fácil e é mais fácil de entender o que está acontecendo quando você calcula uma aproximação. Aqui está o porquê. Você sabe que a linha passa pelo ponto (9,3), certo? E você sabe que a inclinação da reta é $\frac{1}{6}$. Então, você pode começar em (9,3) e ir para a direita (ou para a esquerda) ao longo da reta na figura do degrau da escada, como mostrado na Figura 12-11: sobre 1, acima de $\frac{1}{6}$; sobre 1, acima de $\frac{1}{6}$; e assim sucessivamente.

Figura 12-11: A reta da aproximação linear e muitos dos seus pontos.

Então, quando você estiver fazendo uma aproximação, você começa no valor *y* de 3 e sobe $\frac{1}{6}$ para cada 1 que você for para a direita. Ou se você for para a esquerda, você desce $\frac{1}{6}$ para cada 1 que você for para a esquerda. Quando a equação da reta for escrita na forma acima, o cálculo de uma aproximação se compara ao esquema do degrau da escada.

A Figura 12-11 mostra os valores aproximados para as raízes quadradas de 7, 8, 10, 11, e 12. Aqui está como você obtém esses valores. Para obter 8, por exemplo, a partir de (9,3), você anda 1 para a esquerda, e desce $\frac{1}{6}$ para $2\frac{5}{6}$; ou para obter 11 a partir de (9,3), você anda *dois* para a direita, e sobe *dois* sextos para $3\frac{2}{6}$ ou $3\frac{1}{3}$. (Se você for para a direita de *um meio* para $9\frac{1}{2}$, você sobe *metade* de um sexto, isto é, um doze avos, para $3\frac{1}{12}$ - a raiz quadrada aproximada de $9\frac{1}{2}$).

A seguir estão os erros para as aproximações mostradas na Figura 12-11. Note que os erros aumentam à medida que você se afasta do ponto de tangência (9,3); além disso, os erros aumentam mais rápido indo para baixo a partir de (9,3) do que subindo a partir (9,3) – erros geralmente aumentam mais rápido em uma direção do que na outra com aproximações lineares.

$\sqrt{7}$: 0,8% erro
$\sqrt{8}$: 0,2% erro
$\sqrt{10}$: 0,1% erro
$\sqrt{11}$: 0,5% erro
$\sqrt{12}$: 1,0% erro

Equação de aproximação linear: Aqui está a forma geral para a equação da reta tangente que você usa para uma *aproximação linear*. Os valores de uma função *f(x)* podem ser aproximados com base nos valores da reta tangente *l(x)* perto do ponto de tangência, $(x_0, f(x_0))$, onde

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Isso é menos complicado do que aparenta. É apenas a versão do cálculo elegante para a equação ponto-inclinação da reta que você sabe desde a Álgebra 1, $y - y_1 = m(x - x_1)$, com o y_1 movido para o lado direito:

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

Essa equação algébrica e a equação acima para *l(x)* se diferenciam apenas nos símbolos usados; o *significado* de ambas as equações – termo por termo – é idêntico. E note como ambas as equações lembram a equação da reta tangente na figura 12-11.

Toda vez que for possível, tente ver os conceitos básicos da álgebra e da geometria no coração dos conceitos sofisticados do cálculo.

Problemas de Administração e Economia

Acredite ou não, o cálculo é na verdade usado no mundo real da administração e na economia – aprenda cálculo e aumente seu lucro! Quero saber uma coisa: quando você está dirigindo em uma parte luxuosa da cidade e passa por uma casa *enorme*, qual é a primeira coisa que vem a sua mente? Eu aposto que é "Olha aquela casa! Esse cara (ou essa mulher) deve saber cálculo".

Controlando marginais em economia

Olhe novamente a Figura 12-10 e a 12-11 no tópico anterior. Lembre-se que a derivada e, desta forma, a inclinação de $y = \sqrt{x}$ em $(9,3)$ é $\frac{1}{6}$, e que a reta tangente nesse ponto pode ser usada para aproximar a função para perto do ponto de tangência. Então, conforme você passa de 1 de 9 para 10 ao longo da própria função, você sobe em mais ou menos $\frac{1}{6}$. E, assim, $\sqrt{10}$ é mais ou menos $\frac{1}{6}$ a mais do que $\sqrt{9}$. A matemática das *marginais* funciona exatamente da mesma maneira.

Custo marginal, *renda marginal* e *lucro marginal* envolvem quanto uma função sobe (ou desce) conforme você vai 1 unidade para a direita – assim como uma aproximação linear.

Digamos que você tenha uma função custo que te dá o custo total, $C(x)$, de produção de x itens. Veja a Figura 12-12.

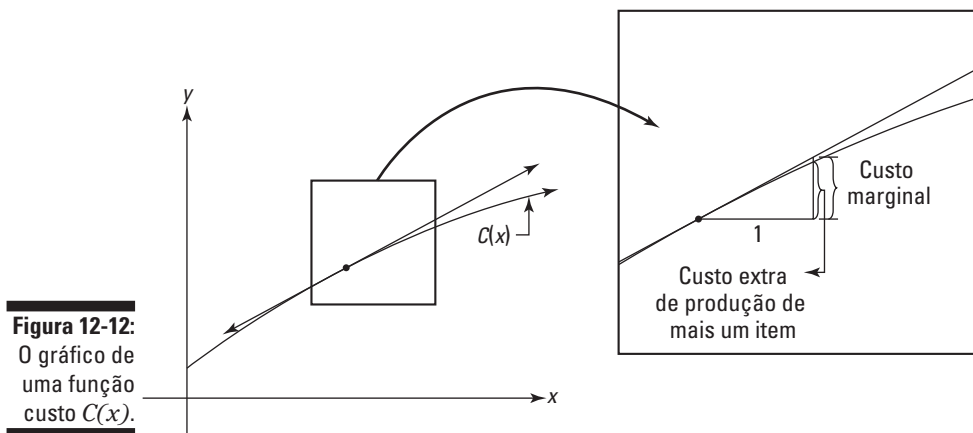



Figura 12-12: O gráfico de uma função custo $C(x)$.

A derivada de $C(x)$ no ponto de tangência lhe dá a inclinação da reta tangente e assim a quantia que você sobe conforme vai 1 para a direita ao longo da reta. Indo 1 para a direita ao longo da própria função custo mostra a você o aumento no custo de produção de mais um item. Assim, posto que a reta tangente seja uma boa aproximação da função custo, a derivada de C – chamada de *custo marginal* – é o aumento *aproximado* no custo de produção de mais um item. Receita marginal e lucro marginal funcionam da mesma maneira.

Antes de fazer um exemplo envolvendo marginais, há mais uma questão a ser resolvida. Uma *função demanda* diz a você quantos itens serão adquiridos (qual será a demanda) dado o preço. Quanto mais baixo o preço, é claro, mais alta é a demanda. Você pode pensar que o número adquirido deveria ser uma função do preço – entre com o preço e descubra quantos itens as pessoas vão comprar a este preço – mas tradicionalmente, uma função demanda é feita de outro modo. O preço é dado em função do número demandado. Eu sei que parece um pouco estranho, mas a função funciona de qualquer maneira. Pense nela dessa forma – se um varejista quer vender um dado número de itens, a função demanda diz a ele ou ela qual deve ser o preço de venda.

Ok. Aqui está um exemplo. Um produtor de um produto qualquer determina que a função demanda para seu produto é

$$p = \frac{1000}{\sqrt{x}}$$

onde x é a demanda para os produtos em um dado preço, p. O custo de produção de x produtos é dado pela função custo a seguir:

$$C(x) = 10x + 100\sqrt{x} + 10.000$$

Determine o custo marginal, a renda marginal e o lucro marginal em x = 100 produtos. Além disso, quantos produtos devem ser manufaturados e a quanto devem ser vendidos para produzir um lucro máximo, e qual é esse lucro máximo? (Se você conseguir completar isso, eu vou indicar você para o Prêmio Nobel em economia).

Custo marginal

O custo marginal é a derivada da função custo, então pegue a derivada e a avalie em x = 100.

$$C(x) = 10x + 100\sqrt{x} + 10.000$$

$$C'(x) = 10 + \frac{50}{\sqrt{x}} \text{ (regra da potência)}$$

$$C'(100) = 10 + \frac{50}{\sqrt{100}}$$

$$= 10 + \frac{50}{10}$$

$$= 15$$

Assim, o custo marginal em x = 100 é $15 – esse é o custo aproximado para produzir o 101° produto.

Renda marginal

Renda, $R(x)$, é igual ao número de itens vendidos, x, multiplicado pelo preço, p:

$$R(x) = x \,.\, p$$

$$= x \cdot \frac{1000}{\sqrt{x}} \quad \text{(usando a função demanda acima)}$$

$$= \frac{1000x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{(racionalizando o denominador)}$$

$$= \frac{1000x\sqrt{x}}{\text{x}}$$

$$= 1000\sqrt{x}$$

Renda marginal é a derivada da função rendimento, então pegue a derivada de $R(x)$ r avalie em x = 100:

$$R(x) = 1000\sqrt{x}$$

$$R'(x) = \frac{500}{\sqrt{x}} \quad \text{(regra da potência)}$$

$$R'(100) = \frac{500}{\sqrt{100}}$$

$$= 50$$

Assim, a renda aproximada para vender o 101° produto é de $50.

Lucro marginal

Lucro, $P(x)$, é igual à renda menos o custo. Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 1000\sqrt{x} - (10x + 100\sqrt{x} + 10.000) \\ &= -10x + 900\sqrt{x} - 10.000 \end{aligned}$$

Lucro marginal é a derivada da função lucro, então pegue a derivada de $P(x)$ e a avalie em $x = 100$.

$$\begin{aligned} P(x) &= -10x + 900\sqrt{x} - 10.000 \\ P'(x) &= -10 + \frac{450}{\sqrt{x}} \qquad \text{(regra da potência)} \\ P'(100) &= -10 + \frac{450}{\sqrt{100}} \\ &= -10 + 45 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Vender o 101° produto produz um lucro aproximado de $35.

Você notou um dos dois atalhos que você poderia ter usado aqui? Primeiramente, você pode usar o fato a fim de

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

determinar $P'(x)$ diretamente, sem primeiro determinar $P(x)$. Em seguida, depois de achar $P'(x)$, você apenas insere 100 no lugar de x para a sua resposta.

E se tudo o que você quiser saber é $P'(100)$, você pode usar o atalho a seguir:

$$\begin{aligned} P'(100) &= R'(100) - C'(100) \\ &= 50 - 15 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Isso é bom senso. Se você gasta $15 para produzir o 101° produto e você o vende por mais ou menos $50, então seu lucro é de $35.

Eu fiz da maneira mais longa porque você precisa tanto da função lucro, $P(x)$, como da função lucro marginal, $P'(x)$, para os problemas a seguir.

Lucro máximo

Você determina o lucro máximo da mesma forma que você descobre o máximo de qualquer função: Iguale a derivada do lucro – isto é, o lucro marginal – a zero, resolva em função de x, depois insira o resultado na função lucro.

$$
\begin{aligned}
P'(x) &= -10 + \frac{450}{\sqrt{x}} \\
0 &= -10 + \frac{450}{\sqrt{x}} \\
10 &= \frac{450}{\sqrt{x}} \\
10\sqrt{x} &= 450 \\
\sqrt{x} &= 45 \\
x &= 2025
\end{aligned}
$$

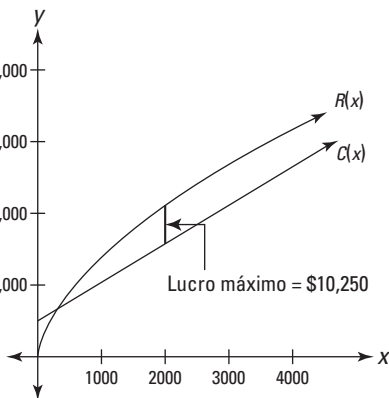
Então, o lucro máximo ocorre quando 2025 produtos são vendidos. Agora, insira isso em $P(x)$:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -10x + 900 + \sqrt{x} - 10.000 \\
P(2025) &= -10 \cdot 2025 + 900\sqrt{2025} - 10.000 \\
&= -20.250 + 900 \,.\, 45 - 10.000 \\
&= 10.250
\end{aligned}
$$

Esse é o lucro máximo - \$10.250. Por fim, insira o número vendido na função demanda para determinar o preço de maximização do lucro:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1000}{\sqrt{x}} \\
p &= \frac{1000}{\sqrt{2025}} \\
p &= \frac{1000}{45} \\
&\approx 22{,}22
\end{aligned}
$$

Então, na teoria, o lucro máximo de \$10.250 ocorre quando o preço é fixado em \$22,22. Nesse preço, 2025 produtos serão vendidos. A Figura 12-13 resume todos esses resultados. Note que devido ao fato de o lucro ser igual a renda menos o custo, a distância vertical ou intervalo entre a função renda e a função custo em um dado valor de x dá um lucro nesse valor de x. O lucro máximo ocorre quando o intervalo é o maior.

Figura 12-13: As funções de lucro e custo. A distância vertical entre as duas funções, em um dado valor de x, representa o lucro nesse dado valor de x.

(Note que enquanto a escala desse gráfico faz *C(x)* parecer uma linha reta, seu segundo termo $100\sqrt{x}$ significa que não é exatamente reta).

E outra coisa. Devido ao fato de o lucro máximo ocorrer quando $P'(x) = 0$, e visto que $P'(x) = R'(x) - C'(x)$, se segue que $R'(x) = C'(x)$ onde o lucro é o maior. Então se você fosse desenhar as retas tangentes à *R(x)* e *C(x)* onde o intervalo entre os dois é o maior, essas tangentes seriam paralelas. Nesse momento você deve estar pensando algo do tipo – ***Que simetria, que elegância simples, que beleza! Realmente, a inspiração matemática seduz o coração tanto quanto a mente.*** Sim, é muito bom, mas não vamos nos deixar levar.

Parte V

Integração e séries infinitas

Nesta parte...

A integração é uma adição sofisticada – muito sofisticada. É o processo de pegar uma forma cuja área você não pode determinar diretamente, cortar em pequenos pedaços cujas áreas você pode determinar, e depois somar todos os pedaços para obter a área do todo.

E as séries infinitas? Pense nisso por um segundo: Se você começa a 1 metros de distância de uma parece e depois anda metade, e depois outra metade, e depois outra metade (Eu aposto que você já ouviu isso), quanto tempo você vai levar para chegar à parede? Resposta: Depende. Existe um número infinito de passos nesse processo, então, se cada passo levar, digamos, um segundo, você nunca vai chegar lá. Se, no entanto, você mantiver uma velocidade constante de 1 metro por segundo, sem parar ou diminuir ao final de cada passo, você ainda vai dar um número infinito de passos, mas você vai chegar na parede em exatamente 1 segundo! Esse surpreendente resultado de somar um número infinito de números, mas obter uma soma finita, é o que o último capítulo da Parte V aborda: É um tópico cheio de paradoxos bizarros.

Capítulo 13
Introdução à Integração e Área Aproximada

Neste Capítulo

- Integrando – somando tudo
- Áreas aproximadas
- Avaliando a notação sigma
- Usando a integral definida para obter áreas exatas
- Somando trapézios
- Regra de Simpson: Cálculo para Bart e Homer

Já que você ainda está lendo esse livro, isso significa que você sobreviveu à diferenciação (Capítulos 9 até 12). Agora você começa o segundo maior tópico em cálculo – a integração. Assim como duas idéias simples estão no coração da diferenciação – *razão* (como *quilômetros por hora*) e o declive ou *inclinação* de uma curva – a integração também pode ser entendida em termos de duas idéias simples – *somando* pequenos pedaços de alguma coisa e a *área* embaixo de uma curva. Nesse capítulo, eu introduzo esses dois conceitos fundamentais.

Integração: Apenas Adição Sofisticada

Considere a luminária na Figura 13-1. Digamos que você queira determinar o volume da base da luminária. Por que você iria querer fazer isso? Não faço a menor ideia. De qualquer forma, a fórmula para o volume de uma forma estranha não existe, então você não pode calcular o volume diretamente.

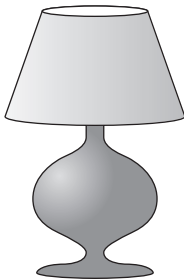



Figura 13-1: Uma luminária com uma base sinuosa.

Você pode, no entanto, calcular o volume com a integração. Imagine que a base é cortada em fatias finas e horizontais como mostra a Figura 13-2.

Figura 13-2: A base da lâmpada cortada em fatias finas e horizontais.

Você consegue ver que cada fatia tem a forma de uma panqueca fina? Agora, visto que ***existe*** uma fórmula para o volume da panqueca, você pode determinar o volume total da base simplesmente calculando o volume de cada fatia no formato de panqueca e depois somar os volumes. Isso é, em poucas palavras, a integração.

Mas, é claro, se isso era tudo que havia para a integração, não haveria tanto alvoroço sobre ela – certamente não o suficiente para alevar Newton Leibnitz, e outros grandes matemáticos para a galeria da fama da matemática. O que faz a integração ser uma das grandes conquistas na história da matemática é que – para continuar com o exemplo da lâmpada – ela lhe dá o volume ***exato*** da base da lâmpada mais ou menos cortando ela em um número ***infinito*** de fatias finas ***infinitas***. Agora isso ***é*** alguma coisa. Se você cortar a lâmpada em menos do que um número infinito de fatias, você pode obter apenas uma muito boa aproximação do volume – e não a resposta exata – porque cada fatia na forma de panqueca vai ter uma borda estranha e curvada que pode causar um pequeno erro.

A integração tem um símbolo elegante: $\int$. Você provavelmente já o viu antes – talvez em algum desenho com algum rapaz Einstein na frente de um quadro-negro cheio de jargões indecifráveis e de difícil compreensão. Logo, esse será ***você***. Isso mesmo – você vai estar enchendo as páginas do seu caderno com equações contendo o símbolo da integração. Os espectadores vão ficar impressionados e cheios de inveja.

Você pode pensar no símbolo da integração como apenas um S alongado para "soma". Então, para o nosso problema da luminária, você pode escrever

$$\int_{base}^{topo} dL = L$$

onde dL significa um pequeno pedaço da luminária – na verdade um pedaço infinitamente pequeno. Então a equação significa que se você somar todos esses pequenos pedaços da luminária da *base* até o *topo*, o resultado é L, o volume da luminária toda.

Isso é um pouco simplificado demais – eu posso escutar a sirene da polícia matemática agora – mas é uma boa maneira de pensar sobre a integração. A propósito, pensar no dL como um pedaço pequeno ou infinitesimal de L é uma idéia que você viu antes com a diferenciação (veja o Capítulo 9), onde a derivada ou inclinação, $\frac{dy}{dx}$, é igual a relação entre um pouco de y (Δy) e um pouco de x (Δx), à medida que você encolhe a inclinação do degrau da escada a um tamanho infinitesimal – veja a Figura 13-3 (e dê uma olhada na Figura 9-12). Em outras palavras, à medida que Δx se aproxima de zero, $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

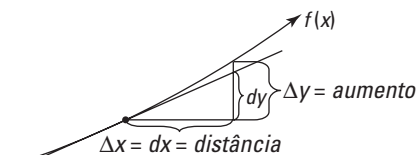



Figura 13-3: No limite, $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Então, toda vez que você vir algo do tipo

$$\int_a^b \textit{pequeno pedaço de bobagem}$$

isso apenas significa que você soma todos os pequenos pedaços da bobagem de a até b para obter o total de toda a bobagem de a até b. Ou você talvez veja algo do tipo

$$\int_{t=0}^{t=20} \textit{pequeno pedaço de bobagem}$$

que significa somar todos os pequenos pedaços da distância viajada entre 0 e 20 segundos para obter a distância total viajada durante esse intervalo de tempo.

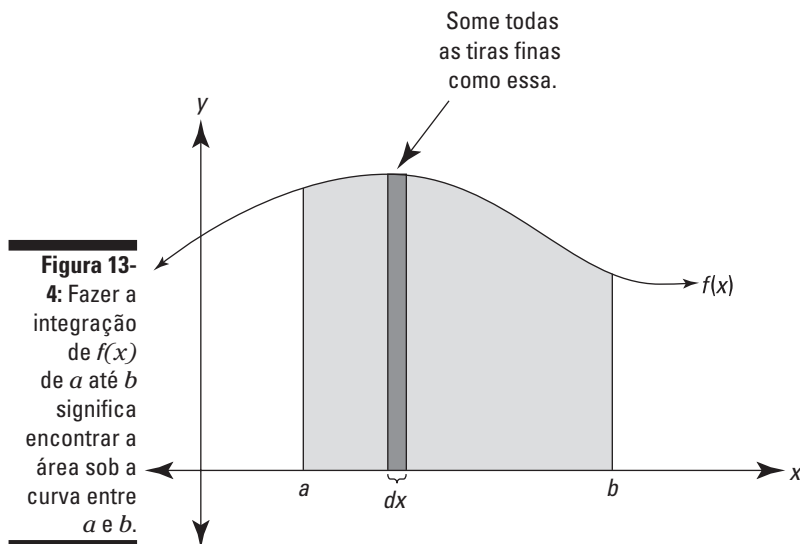
Resumindo, a expressão matemática à direita do símbolo de integração sempre corresponde a um pouco de alguma coisa, e integrar esse tipo de expressão significa somar todos os pequenos pedaços entre algum ponto de partida e algum ponto de chegada.

Encontrando a Área Sob uma Curva

Como eu discuti no Capítulo 9, o significado mais básico de uma derivada é que é uma razão, um *isso por aquilo*, como *quilômetros por hora*, e que quando você desenha o gráfico do *isso* como uma função do *aquilo* (como *quilômetros* como uma função da *hora*), a derivada se torna a

inclinação da função. Em outras palavras, a derivada é uma razão, que em um gráfico aparece como uma inclinação.

E funciona mais ou menos da mesma maneira com a integração. O significado mais básico da integração é somar. E quando você descreve a integração em um gráfico, você pode ver o processo de soma como a soma de pequenos pedaços da área para chegar à área total sob a curva. Considere a Figura 13-4.

Figura 13-4: Fazer a integração de *f(x)* de *a* até *b* significa encontrar a área sob a curva entre *a* e *b*.

A área sombreada na Figura 13-4 pode ser calculada com a seguinte integral:

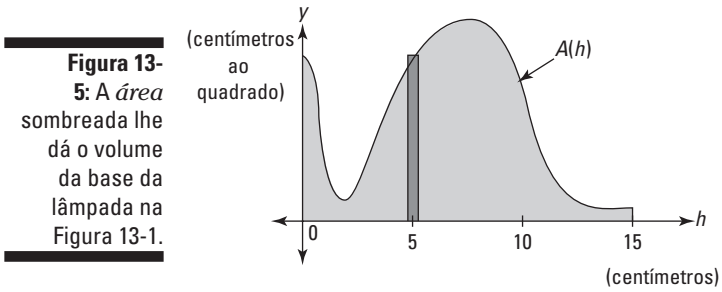
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Olhe para o retângulo fino na Figura 13-4. Ele tem uma altura de $f(x)$ e uma largura de dx (um pouco de x), então a sua área (***base*** vezes ***altura***, é claro) é dada por $f(x) \cdot dx$. A integral acima diz para você somar as áreas de todos os filetes retangulares estreitos entre a e b sob a curva $f(x)$. À medida que o filete fica cada vez mais estreito você obtém uma estimativa cada vez melhor da área. O poder da integração está no fato de que ela lhe dá a área ***exata*** ao somar mais ou menos um número infinito de infinitos retângulos finos.

Sem levar em consideração o que os pequenos pedaços que você está somando são – eles podem ser pequenos pedaços de distância ou volume ou energia (ou apenas área) – você pode representar o somatório como a soma das áreas dos finos filetes retangulares sob a curva. Se as unidades nos eixos x e y forem, digamos, ***metros***, então cada fino retângulo mede tantos metros por tantos metros, e sua área – ***base*** vezes ***altura*** – é algum número de ***metros quadrados***. Nesse caso, a área total de todos os retângulos lhe dá a área sob a curva entre a e b (embora não para escalonar).
Se, por outro lado, a unidade no eixo x for ***horas (t)*** e no eixo y for

classificada como *quilômetros por hora*, tendo em vista que a *velocidade* vezes *tempo* é igual à *distância*, a área de cada retângulo representa uma quantidade da distância e a área total lhe dá a distância total viajada durante o dado intervalo de tempo. Ou se o eixo x for classificado em *horas* (t) e o eixo y em *quilowatts* de potência elétrica – e nesse caso a curva, $f(t)$, dá o consumo da energia em função do tempo – então a área de cada filete retangular (*quilowatts* vezes *hora*) representa um número de *quilowatt-hora* de energia. Nesse caso, a área total sob a curva lhe dá o número total de quilowatt-hora de consumo de energia entre os dois pontos no tempo.

A Figura 13-5 mostra como você faria o problema da luminária – do começo desse capítulo – somando as áreas. Nesse gráfico, a função $A(h)$ dá a *área* da seção transversal de uma fina fatia de panqueca da lâmpada como uma função da sua altura medida a partir da base da lâmpada. Então, dessa vez, o eixo h é classificado em *polegadas* (isto é, h como em altura a partir da base da lâmpada), e o eixo y é classificado em *polegadas ao quadrado*, e assim cada retângulo fino tem uma base medida em polegadas e uma altura medida em polegadas ao quadrado. Então a sua área representa *centímetros* por *centímetros ao quadrado*, ou *centímetros cúbicos* de volume.

Figura 13-5: A *área* sombreada lhe dá o volume da base da lâmpada na Figura 13-1.

A área do retângulo fino na Figuras 13-5 representa o *volume* da fina fatia de panqueca da luminária à 5 centímetros acima do fundo da base. A área total sombreada e assim o volume da base da luminária são dados pela integral a seguir:

$$Volume = \underbrace{\text{área da seção transversal}} \times \underbrace{\text{espessura}}$$

$$V = \int_0^{15} \overbrace{A(H)}\,\overbrace{dh}$$

que significa que você soma os volumes de todas as finas fatias de panqueca de 0 a 15 polegadas (isto é, do fundo até o topo da base da lâmpada), cada pedaço tendo um volume dado por $A(h)$ (sua área da seção transversal) vezes dh (sua altura ou densidade).

Lidando com a Área Negativa

Nos exemplos envolvendo volume, distância e energia (do tópico anterior), você está sempre somando pedaços *positivos* de algo. Isso é geralmente o caso com problemas práticos porque você não pode, por exemplo, ter um volume de água negativo ou usar um número negativo de quilowatt-hora de energia. No entanto, você algumas vezes vai integrar funções que entram nos negativos – isto é, abaixo do eixo x. Aqui está alguns indicadores para quando isso acontecer.

Ao usar a integração para calcular a área, a área ***abaixo*** do eixo x é considerada como uma área ***negativa***. A área total entre a e b para uma curva $f(x)$ – dada pela integral $\int_a^b f(x)\,dx$ – é realmente uma área ***líquida*** onde a área total abaixo do eixo x (e acima da curva) é subtraída da área total acima do eixo x (e abaixo da curva).

Pense no eixo x como no nível do solo, áreas acima do eixo x como montes de areia e área abaixo do eixo x como buracos no solo. A área líquida então representa a quantidade de terra deixada acima do nível do solo depois que você usa a terra dos montes para encher os buracos (Essa área líquida pode ser uma número negativo).

No Capítulo 16, eu mostro a você como calcular a área total entre uma curva e o eixo x onde todas as seções da área são ditas positivas.

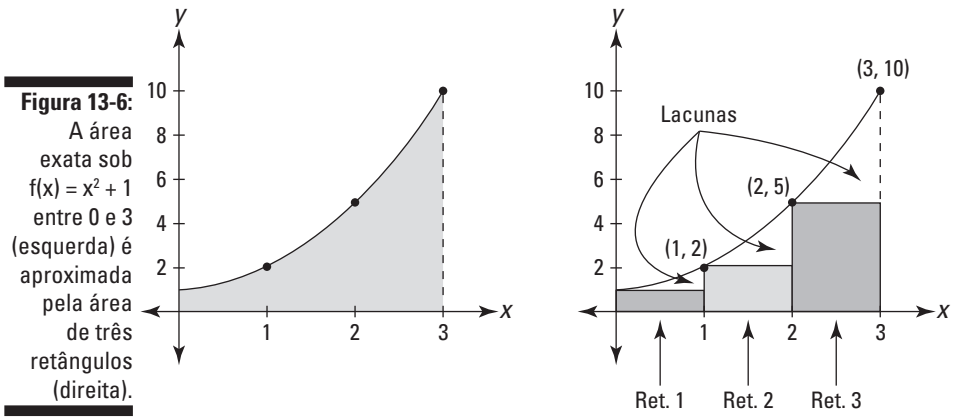
Ok. Já está bom dessa coisa introdutória. No próximo tópico, você vai realmente calcular algumas áreas.

Área Aproximada

Antes de explicar como calcular áreas exatas, eu quero mostrar a você como aproximar áreas. O método de aproximação é útil não apenas porque prepara a base para o método exato – integração – mas porque para algumas curvas, a integração é impossível, e a aproximação de uma área é o melhor que você pode fazer.

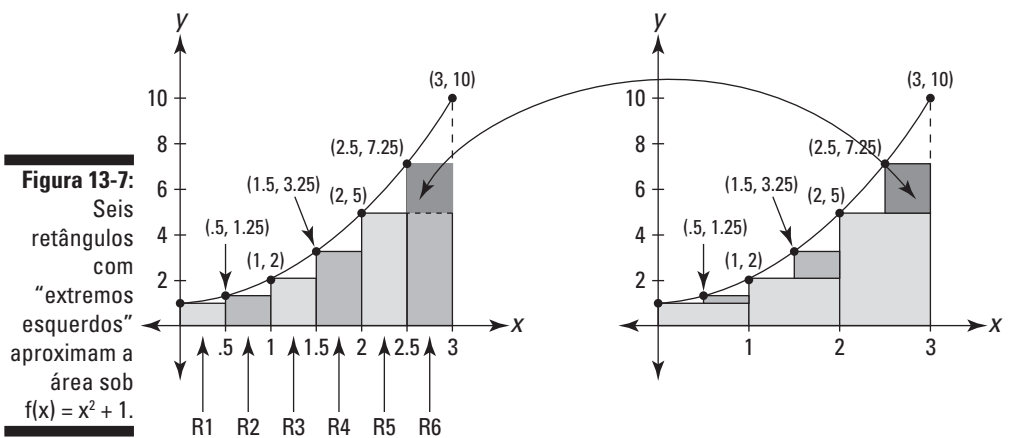
Área aproximada pela soma dos extremos esquerdos

Digamos que você queira a área exata sob a curva $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3. Veja a área sombreada no gráfico da esquerda na Figura 13-6.

Figura 13-6: A área exata sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3 (esquerda) é aproximada pela área de três retângulos (direita).

Primeiramente, você obtém uma estimativa aproximada da área desenhando os três retângulos sob a curva, como mostrado à direita da Figura 13-6, e depois determinando a soma das suas áreas.

Os retângulos na Figura 13-6 representam o tão falado *extremo esquerdo* porque o canto esquerdo superior de cada retângulo toca a curva. Cada retângulo tem uma base de 1 e a altura de cada é dada pela altura da função da borda esquerda do retângulo. Então, o retângulo número 1 tem uma altura de $f(0) = 0^2 + 1 = 1$; sua área (*comprimento* × *largura* ou *base* × *altura*) é assim 1 × 1, ou 1. O retângulo 2 tem uma altura de $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, então sua área é 2 × 1, ou 2. E o retângulo 3 tem um altura de $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, então sua área é 5 × 1, ou 5. Somando essas três áreas lhe dá um total de 1 + 2 + 5, ou 8. Você pode ver que isso é uma avaliação abaixo do valor total da área sob a curva por causa das três lacunas entre os retângulos e a curva mostradas na Figura 13-6.

Para uma melhor estimativa, dobre o número de retângulos para seis. A Figura 13-7 mostra seis retângulos com "extremos esquerdos" sob a curva e também como os seis retângulos começam a encher as três lacunas que você vê na Figura 13-6.

Figura 13-7: Seis retângulos com "extremos esquerdos" aproximam a área sob $f(x) = x^2 + 1$.

Você consegue ver os três retângulos pequenos sombreados no gráfico da direita na Figura 13-7? Eles sentam no topo dos três retângulos da Figura 13-6 e representam quanto da área estimada foi melhorada usando seis retângulos em vez de três.

Agora some as áreas dos seis retângulos. Cada um tem uma largura de 0,5 e as alturas são $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(1{,}5)$, e assim por diante. Eu vou livrar você da aritmética. Aqui está o total: $0{,}5 + 0{,}625 + 1 + 1{,}625 + 2{,}5 = 9{,}875$. Essa é uma estimativa melhor, mas ainda é uma subestimação por causa das seis lacunas pequenas que você pode ver no gráfico da esquerda na Figura 13-7.

A Tabela 13-1 mostra as estimativas da área dadas por 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, e 384 retângulos. Você não tem que dobrar o número de retângulos toda vez como eu fiz aqui. Você pode usar qualquer número de retângulos que quiser. Eu apenas gosto do esquema de dobrar porque, com cada duplicação, as lacunas são tapadas cada vez mais como mostradas na Figura 13-7.

Tabela 13-1 Estimativas da Área Sob $f(x) = x^2 + 1$ Dadas por Números Crescentes de Retângulos com "Extremos Esquerdos"

Número de retângulos	Área estimada
3	8
6	9,875
12	~10,906
24	~11,445
48	~11,721
96	~11,860
192	~11,930
384	~11,965

Algum palpite sobre para onde as estimativas da Tabela 13-1 estão seguindo? Para mim parece que para 12.

Aqui está a fórmula elegante para a soma dos retângulos de extremos esquerdos:

A regra do retângulo de extremos esquerdos: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre *a* e *b*, $\int_a^b f(x)$, com a soma dos retângulos de *extremos esquerdos* dados pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais retângulos, melhor é a estimativa.

$$L_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n - 1)\right]$$

Onde n é o número de retângulos, $\frac{b-a}{n}$ é a largura de cada retângulo, e os valores da função são as alturas dos retângulos.

É melhor eu explicar um pouco a fórmula. Olhe de volta para os seis retângulos mostrados na Figura 13-7. A largura de cada retângulo é igual ao comprimento do intervalo total de 0 até 3 (que, é claro, é 3 – 0, ou 3) dividido pelo número de retângulos, 6. Isso é o que o $\frac{b-a}{n}$ faz na fórmula.

Agora, e sobre os xs com os subscritos? A coordenada x do lado esquerdo do retângulo 1 na Figura 13-7 é chamada de x_0, o lado direito do retângulo 1 (que é o mesmo que o lado esquerdo do retângulo 2) está em x_1, o lado direito do retângulo 2 está em x_2, o lado direito do retângulo 3 está em x_3, e assim por diante o tempo todo para o lado direito do retângulo 6, que está em x_6. Para os seis retângulos na Figura 13-7, x_0 é 0, x_1 é 0.5, x_2 é 1, x_3 é 1.5, x_4 é 2, x_5 é 2.5, e x_6 é 3. As alturas dos seis retângulos esquerdos na Figura 13-7 ocorrem nos seus lados esquerdos, que estão em 0, 0.5, 1, 1.5, 2, e 2.5 – isto é, de x_0 até x_5. Você não usa o lado direito do último retângulo, x_6, em uma soma de extremos esquerdos. É por isso que a lista de valores na fórmula termina em x_{n-1}. Isso tudo se torna claro – cruze seus dedos – quando você olha a fórmula para os retângulos de *extremos direitos* no próximo tópico.

Aqui está como usar a fórmula para os seis retângulos na Figura 13-7:

$$\begin{aligned} L_6 &= \frac{3-0}{6}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5)\right] \\ &= \frac{1}{2}(1 + 1{,}25 + 2 + 3{,}25 + 5 + 7{,}25) \\ &= \frac{1}{2}(19{,}75) \\ &= 9{,}875 \end{aligned}$$

Note que se eu tivesse distribuído a largura de ½ por cada uma das alturas depois da terceira linha na solução acima, você teria visto a soma das áreas dos retângulos – que você viu uma página atrás. A fórmula apenas usa o atalho de somar primeiro as alturas e depois multiplicar pela largura.

Usar áreas aproximadas ou encontrar áreas exatas, as áreas sob o eixo x são ditas *negativas*. Veja o tópico "Lidando com áreas negativas" no começo desse capítulo.

Área aproximada pela soma dos extremos direitos

Ok. Agora estime a mesma área sob $f(x) = x^2 + 1$ de 0 até 3 com os retângulos de *extremos direitos*. Esse método funciona como a soma dos extremos esquerdos exceto que cada retângulo é desenhado de maneira que o canto direito superior toque a curva. Veja a Figura 13-8.

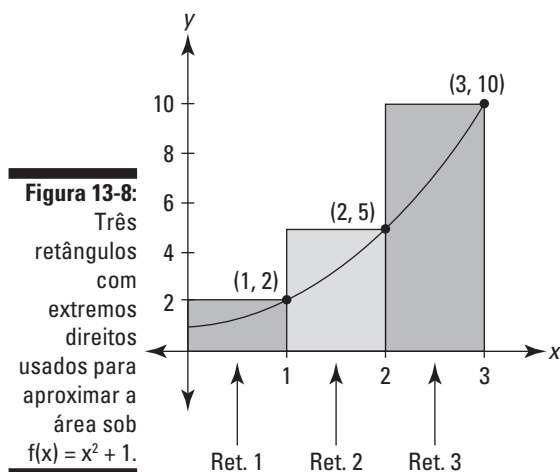
Figura 13-8: Três retângulos com extremos direitos usados para aproximar a área sob $f(x) = x^2 + 1$.

As alturas dos três retângulos na Figura 13-8 são dadas pelos valores da função nos seus lados *direitos*: $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, e $f(3) = 10$. Cada retângulo tem uma largura de 1, então as áreas são 2, 5, e 10, que totalizam 17. Você não tem que ser um gênio para ver que dessa vez você obtém sobrestimativa da área atual sob a curva, ao contrário da subestimação que você obteve com o método do retângulo esquerdo que eu detalhei no tópico anterior (mais sobre isso em um minuto). A Tabela 13-2 mostra as estimativas seguindo uma tendência com mais e mais retângulos direitos.

Tabela 13-2 Estimativas da Área Sob $f(x) = x^2 + 1$ Dadas por Números Crescentes de Retângulos com "Extremos Direitos"

Número de retângulos	Área estimada
3	17
6	14,375
12	~13,156
24	~12,570
48	~12,283
96	~12,141
192	~12,070
384	~12,035

Parece que essas estimativas também estão em direção a 12. Aqui está a fórmula para a soma dos retângulos de extremos direitos:

A regra dos triângulos retângulos: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)\,dx$, com a soma dos retângulos certos dados pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais retângulos, melhor é a estimativa.

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots + f(x_n)\right]$$

onde n é o número de retângulos, $\frac{b-a}{n}$ é a largura de cada retângulo, e os valores da função são as alturas dos retângulos.

Agora se você comparar essa fórmula com a fórmula para a soma dos retângulos com extremos esquerdos (no tópico "Área aproximada pela soma dos extremos esquerdos"), você tem a imagem completa sobre esses subscritos. As duas fórmulas são a mesma exceto por uma coisa. Olhe para as somas dos valores da função em ambas as fórmulas. A fórmula para a soma dos extremos direitos tem um valor, $f(x_n)$, que a fórmula da soma dos extremos esquerdos não tem, e a fórmula da soma dos extremos esquerdos tem um valor, $f(x_0)$, que a fórmula da soma dos extremos direitos não tem. Todos os valores da função entre esses dois aparecem nas duas fórmulas. Você pode entender melhor comparando os três retângulos com extremos esquerdos da Figura 13-6 com os três retângulos com extremos direitos da Figura 13-8. Suas áreas e totais, que nós calculamos mais cedo, são:

Três retângulos com extremos esquerdos: $1 + 2 + 5 = 8$

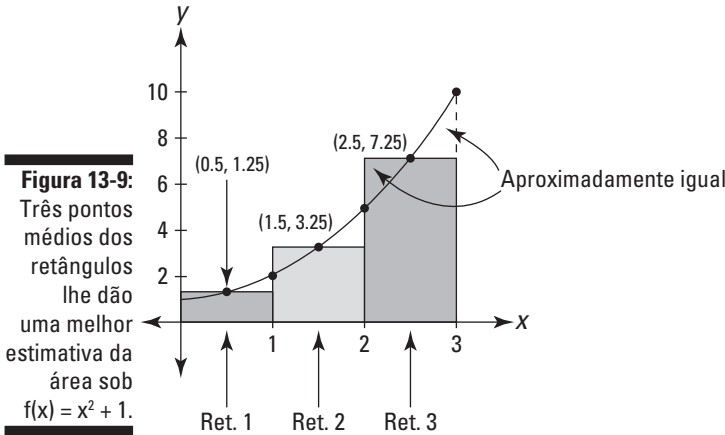
Três retângulos com extremos direitos: $2 + 5 + 10 = 17$

As somas das áreas são as mesmas exceto pelo retângulo com extremo esquerdo mais à esquerda e pelo retângulo com extremo direito mais à direita. Ambas as somas incluem os retângulos com áreas de 2 e 5. Se você olhar para como os retângulos são construídos, você poderá ver que o segundo e terceiro retângulos na Figura 13-6 são iguais ao primeiro e segundo retângulos na Figura 13-8.

Uma última coisa sobre isso. A diferença entre a área total do retângulo com extremo direito (17) e a área total do retângulo com extremo esquerdo (8) – isto é, 17 menos 8, ou 9, caso você ame cálculo mas ainda não aprendeu a subtração básica – vem da diferença entre as áreas dos dois retângulos "finais" discutidos agorinha – 10 menos 1 também é 9. Todos os outros retângulos são repetidos, não importa quantos retângulos você tenha.

Área aproximada pela soma dos pontos médios

Uma terceira maneira de aproximar áreas com retângulos é fazer cada retângulo cruzar a curva no ponto médio da sua parte superior. A soma do ponto médio é uma *melhor* estimativa da área do que a soma esquerda ou direita. A Figura 13-9 mostra por que.

Figura 13-9: Três pontos médios dos retângulos lhe dão uma melhor estimativa da área sob $f(x) = x^2 + 1$.

Você pode ver na Figura 13-9 que a parte de cada retângulo que está acima da curva aparenta ter o mesmo tamanho que a lacuna entre o retângulo e a curva. A soma do ponto médio produz uma boa estimativa porque esses dois erros cancelam, em linhas gerais, um ao outro.

Para os três retângulos da Figura 13-9, as larguras são iguais a 1 e as alturas são $f(0.5) = 1.25$, $f(1.5) = 3.25$, e $f(2.5) = 7.25$. A área total chega a 11,75. A Tabela 13-3 lista as somas dos pontos médios para o mesmo número de retângulos na Tabela 13-1 e 13-2.

Tabela 13-3 Estimativas para a Área Sob $f(x) = x^2 + 1$ Dadas pelos Números Crescentes dos "Pontos Médios" dos Retângulos

Número de retângulos	Área estimada
3	11.75
6	11.9375
12	~11.9844
24	~11.9961
48	~11.9990
96	~11.9998
192	~11.9999
384	~11.99998

Se você tem qualquer dúvida que as somas dos extremos esquerdos e direitos nas Tabelas 13-1 e 13-2 estão na direção de 12, a Tabela 13-3 deve refutá-las. Sim, de fato, a área exata é 12 – desculpe entregar o final. E para ver quão rápido as aproximações do ponto médio se aproximam da resposta exata de 12 do que as aproximações esquerda ou direita, compare as três tabelas. O erro com os 6 pontos médios dos retângulos é mais ou menos o mesmo erro com 192 retângulos esquerdos ou direitos! Aqui está a bobagem.

A regra do ponto médio: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)\,dx$, com a soma dos ***pontos médios*** dos retângulos dados pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais retângulos, melhor é a estimativa.

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

onde n é o número de retângulos, $\frac{b-a}{n}$ é a largura de cada retângulo, e os valores da função são as alturas dos retângulos.

Todas as três somas – esquerda, direita e ponto médio – são chamadas de *somas de Riemann* em homenagem ao matemático G.F.B. Riemann (1826-66). Basicamente, qualquer soma aproximada feita de retângulos é uma soma de Riemann, incluindo somas estranhas consistidas de retângulos de larguras desiguais. Com sorte, você não vai ter que lidar com essas somas nesse livro ou em qualquer curso de cálculo.

A soma esquerda, direita e ponto médio nas Tabelas 13-1, 13-2, e 13-3 estão todas seguindo na direção de 12, e se você puder dividir a área em um número infinito de retângulos, você obterá a área exata de 12. Mas eu estou me excedendo.

Ficando Sofisticado com a Notação Somatória

Antes que eu entre na definição formal da *integral definida* – isto é, a incrível ferramenta do cálculo que corta mais ou menos uma área em um número infinito de retângulos e com isso você tem a área *exata* – há mais uma coisa para tomar cuidado: a notação somatória.

Resumindo os conceitos básicos

Para somar séries longas de números como as áreas do retângulo em uma soma esquerda, direita e ponto médio, a notação somatória ou sigma é útil.

Digamos que você quisesse somar os 100 primeiros múltiplos de 5 – isto é, de 5 até 500. Você poderia escrever essa soma da seguinte forma:

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + \ldots + 490 + 495 + 500$$

Mas com a notação sigma (sigma, $\sum$, é a 18ª letra do alfabeto grego – não diga!) a soma fica muito mais condensada e eficiente, e, vamos ser honestos, parece muito legal:

$$\sum_{i=1}^{100} 5i$$

Essa notação diz para você apenas inserir 1 no lugar de i em $5i$, depois inserir 2 no lugar de 1 em $5i$, depois 3, depois 4, e assim até chegar a 100. Depois você soma os resultados. Então isto é 5×1 mais 5×2 mais 5×3, e assim por diante, até 5×100. Isso é a mesma coisa que escrever a soma da maneira longa. A propósito, a letra i não tem significância. Você pode escrever a soma com um j, $\sum_{j=1}^{100} 5j$, ou qualquer outra letra que você gostar.

Aqui tem mais um. Se você quiser somar $10^2 + 11^2 + 12^2 + \ldots\ldots + 29^2 + 30^2$, você pode escrever a soma com a notação sigma como segue:

$$\sum_{k=10}^{30} k^2$$

É realmente simples.

Escrevendo as somas de Riemann com a notação sigma

Você pode usar a notação sigma para escrever a soma dos extremos direitos para a curva $x^2 + 1$ nos tópicos de "Área aproximada". A propósito, você não precisa da notação sigma para o cálculo que se segue. É apenas uma "conveniência" – sim, certo. Cruze os dedos e torça para que o seu professor decida não abordar o que se segue. Fica muito difícil.

Lembre-se da fórmula para a soma dos extremos direitos do tópico anterior "Área aproximada pela soma dos extremos direitos":

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots + f(x_n)\right]$$

Aqui está a mesma fórmula escrita com a notação sigma:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \right]$$

Agora resolva isso para os seis retângulos direito na Figura 13-10.

Você está descobrindo a área sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3 com seis retângulos, então a largura de cada, $\frac{b-a}{n}$, é $\frac{3-0}{6}$, ou $\frac{3}{6}$, ou $\frac{1}{2}$. Assim, agora você tem

$$R_n = \sum_{i=1}^{6} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

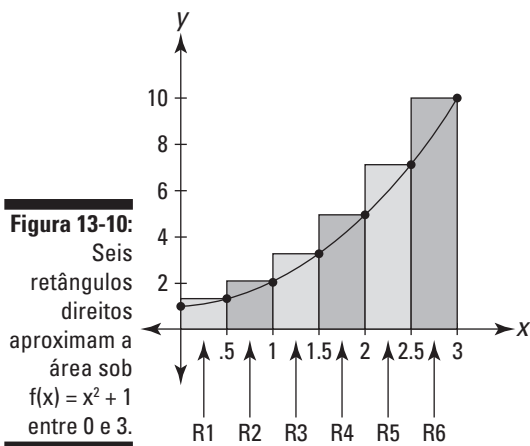



Figura 13-10: Seis retângulos direitos aproximam a área sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Agora, devido ao fato de a largura de cada retângulo ser $\frac{1}{2}$, os lados direitos dos seis retângulos caem nos seis primeiros múltiplos de $\frac{1}{2}$: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, e 3. Esses números são as coordenadas x dos seis pontos x_1 até x_6; eles podem ser gerados pela expressão $\frac{1}{2}i$, onde i é igual de 1 até 6. Você pode verificar que isso funciona inserindo 1 no lugar de i em $\frac{1}{2}i$, depois 2, depois 3, até 6. Então agora você pode substituir o x_1 na fórmula por $\frac{1}{2}i$, dando a você

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} \left[f\left(\frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

Nossa função, $f(x)$, é $x^2 + 1$ então $f\left(\frac{1}{2}i\right) = f\left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 1$, e assim você pode agora escrever

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} \left[\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \right]$$

Se você colocar 1 no lugar de i, depois 2, depois 3, e assim por diante até 6 e fizer os cálculos, você obtém a soma das áreas dos retângulos na Figura 13-10. Essa notação sigma é apenas uma maneira sofisticada de escrever a soma dos seis retângulos.

Estamos nos divertindo? Espera aí, fica mais difícil – desculpe. Agora você vai escrever a soma geral para um número desconhecido *(n)* de retângulos direitos. O intervalo total da área em questão é 3, certo? Você divide esse intervalo pelo número de retângulos para obter a largura de cada retângulo. Com 6 retângulos, a largura de cada um é $\frac{3}{6}$; com n retângulos, a largura de cada um é $\frac{3}{n}$. E os lados direitos dos n retângulos são gerados por $\frac{3}{n}i$, para i igual de 1 até n. Isso te dá

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\frac{3}{n}i\right) \cdot \frac{3}{n} \right]$$

Ou, porque $f(x) = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(\frac{3}{n}i\right)^2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(\frac{9i^2}{n^2}\right) + 1 \right) \cdot \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{27i^2}{n^3}\right) + \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{27i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \qquad \text{(acredite em mim)} \\ &= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \end{aligned}$$

Para esse último passo, extraia o $\frac{27}{n^3}$ e o $\frac{3}{n}$ através dos sinais do somatório – é permitido que você extraia qualquer coisa exceto por uma função de i, também conhecida como *índex da somatória*. Além disso, o segundo somatório no último passo tem apenas 1 depois dele e não um i. Então não há nenhum lugar para inserir os valores de i. Essa situação pode parecer um pouco estranha, mas tudo o que você faz é somar n 1s, que é igual a n (Eu faço isso abaixo, no próximo passo).

Você agora chegou a um passo crítico. Com um truque você vai transformar a soma de Riemann anterior em uma fórmula em função de n. Essa fórmula é o que você usa para obter a área exata sob a curva no próximo tópico, chamado apropriadamente de "Encontrando a área exata com a integral definida".

Agora, como quase ninguém sabe, a soma dos primeiros n números ao quadrado, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2$, é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (A propósito, esse

6 não tem nada a ver com o fato de nós termos usado 6 retângulos algumas páginas atrás). Então, você pode substituir essa expressão por $\sum_{i=1}^{n} i^2$ na última linha da solução da notação sigma, e ao mesmo tempo substituir n por $\sum_{i=1}^{n} 1$:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \cdot n \\ &= \frac{27}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + 3 \\ &= 9 + \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2} + 3 \\ &= 12 + \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2} \end{aligned}$$

(Ok, eu admito, eu não mostrei a você todo o meu trabalho)

Fim. Finalmente! Essa é a fórmula para a área de n retângulos direitos entre 0 e 3 sob a função $= x^2 + 1$. Você pode usar essa fórmula para produzir os resultados dados na Tabela 13-2. Mas, uma vez que você tenha tal fórmula, seria um pouco sem sentido produzir uma tabela de áreas aproximadas, porque você pode usar a fórmula para determinar a área *exata*. E é muito fácil. Eu você chegar nisso em um minuto no próximo tópico.

Mas primeiro, aqui estão as fórmulas para n retângulos esquerdos e n pontos médios dos retângulos entre 0 e 3 sob a função $x^2 + 1$. Essas fórmulas produzem as áreas aproximadas nas Tabelas 13-1 e 13-3. A álgebra para derivar essas fórmulas é mais difícil do que o que você fez para a fórmula do retângulo direito, então eu decidi pular. Você se importa? Eu achei que não.

$$\begin{aligned} L_n &= 12 - \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2} \\ M_n &= 12 - \frac{9}{4n^2} \end{aligned}$$

E agora, o que vocês todos estavam esperando...

Encontrando a Área Exata com a Integral Definida

Tendo mostrado todos os fundamentos necessários, você finalmente está pronto para determinar áreas exatas – que é o que faz a integração. Você não precisa do cálculo para fazer todo o negócio da aproximação que você acabou de fazer.

Como você viu com o retângulo esquerdo, direito e o ponto médio nos tópicos de "Área aproximada", quanto mais retângulos você tiver, melhor será a aproximação. Então, "tudo" o que você tem que fazer para obter a área exata sob uma curva é usar um número infinito de retângulos. Agora, na verdade, você não pode usar um número infinito de retângulos, mas com a fantástica invenção dos limites, isso é mais ou menos o que acontece. Aqui está a definição de uma integral definida que é usada para calcular as áreas exatas.

A integral definida (definição "simples"): A área exata sob uma curva entre *a* e *b* é dada pela *integral definida*, que é definida como segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

Isso é bonito ou não? O somatório acima é idêntico à fórmula para *n* retângulos direitos, R_n, que eu mostro algumas páginas atrás. A única diferença aqui é que você acha o limite dessa fórmula como o número de retângulos se aproximando do infinito (∞).

Essa definição de uma integral definida é a versão simples baseada na fórmula do retângulo direito. Eu vou lhe dar a verdadeira definição McCoy mais tarde, mas pelo fato de todas as somas Riemann terem o mesmo limite – em outras palavras, não importa qual tipo de retângulo você usa – é preferível usar a definição do retângulo direito. É o menos complicado e vai sempre ser suficiente.

Vamos fazer soar os tambores! Aqui, finalmente, está a área exata sob o nosso velho amigo $x^2 + 1$ entre 0 e 3:

$$\int_0^3 f(x^2+1)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right)$$ (Lembre-se, em um problema sobre limite, qualquer número dividido pelo infinito é igual a zero.)

$$= 12 + \frac{27}{2 \cdot \infty} + \frac{9}{2 \cdot \infty^2}$$

$$= 12 + \frac{27}{\infty} + \frac{9}{\infty}$$

$$= 12 + 0 + 0$$ (Isso é o que nós obtivemos no tópico "Escrevendo as somas Riemann com a notação sigma" depois de todos aqueles passos.)

$$= 12$$

Grande surpresa.

Esse resultado é muito incrível se você pensar nele. Usando o processo do limite, você obtém uma resposta *exata* de 12 – que é mais ou menos 12,00000000... até um número infinito de casas decimais – para a área sob a função curva e suave $x^2 + 1$, baseada nas áreas de retângulos de topo plano que vão ao longo da curva no formato de dente de serra recortado. Deixe-me adivinhar – o simples poder dessa beleza matemática traz lágrimas aos seus olhos.

Encontrar a área exata de 12 usando o limite de uma soma de Riemann é muito trabalho (lembre-se, você teve que primeiro determinar a fórmula

para *n* retângulos direto). Esse método complicado de integração é comparável a determinar a derivada da maneira difícil usando a definição formal que é baseada no quociente da diferença (se você esqueceu e tem vontade de lembrar, veja o Capítulo 9). E assim que você parar de usar a definição formal da derivada depois que você aprender os atalhos da diferenciação, você não terá que usar a definição formal da integral definida baseada na soma de Riemann depois de aprender os métodos de atalho nos Capítulos 14 e 15 – exceto, isto é, para o seu exame final.

Devido ao fato de o limite de todas as somas Riemann ser o mesmo, os limites no infinito de *n* retângulos esquerdos e *n* pontos médios dos retângulos – para $x^2 + 1$ entre 0 e 3 – devem nos dar o mesmo resultado como o limite de *n* retângulos direitos, e eles dão. As expressões depois dos símbolos do limite a seguir são as fórmulas para *n* retângulos esquerdos e *n* pontos médios dos retângulos que aparecem no final do tópico "Escrevendo as somas de Riemann com a notação sigma" no começo desse capítulo. Aqui está o limite do retângulo esquerdo:

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = L_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right)$$

$$= 12 + \frac{27}{2\cdot\infty} + \frac{9}{2\cdot\infty^2}$$

$$= 12 - \frac{27}{\infty} + \frac{9}{\infty}$$

$$= 12 - 0 + 0$$

$$=12$$

E aqui está o limite do ponto médio do retângulo:

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = M_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(12 - \frac{9}{4n^2}\right)$$

$$= 12 - \frac{9}{4\cdot\infty^2}$$

$$= 12 - \frac{9}{\infty}$$

$$= 12 - 0$$

$$= 12$$

Se você está um tanto incrédulo que esses limites lhe dão a área *exata* sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3, você não está sozinho. Afinal de contas, nesses limites, assim como em todos os problemas com limites, o número x (∞ nesse exemplo) é somente *aproximado*; na verdade, não é nunca alcançado. E, além disso, o que significaria alcançar o infinito? Você não pode fazer isso. E sem levar em consideração quantos retângulos você tem, você sempre tem aquele lado de dente de serra recortado. Então como pode tal método lhe dar a área exata?

Olhe para ele dessa maneira. Você pode dizer a partir das Figuras 13-6 e 13-7 que a soma das áreas dos retângulos esquerdos, sem levar em consideração a quantidade, vai sempre ser uma ***subestimação*** (esse é o

caso para as funções que estão aumentando ao longo do intervalo em questão). E a partir da Figura 13-8, você pode ver que a soma das áreas de retângulos direitos, sem levar em consideração a quantidade que você tem, vai sempre ser uma ***superestimação*** (para funções crescentes). Então, visto que os limites no infinito da subestimação e da superestimação são iguais a 12, essa deve ser a área exata (Um argumento semelhante funciona para funções decrescentes).

Não somente os limites no infinito dos retângulos esquerdos, direitos e dos pontos médios são os mesmos, o limite de qualquer soma de Riemann também lhe dá a mesma resposta. Você pode ter uma série de retângulos com larguras desiguais; você pode ter uma mistura de retângulos esquerdos, direitos e de pontos médios; ou você pode construir retângulos para que eles toquem a curva em algum ponto diferente do canto superior esquerdo ou direito ou nos pontos médios dos seus lados superiores. A única coisa que importa é que, no limite, a largura de todos os retângulos tende para zero. Isso nos traz para a bobagem da integração totalmente extrema e vulgar que leva em conta todas essas possibilidades.

A integral definida (a real definição de McCoy): A integral definida de a até b, $\int_a^b f(x)dx$, é o número para o qual todas as somas de Riemann tendem à medida que o número de retângulos se aproxima do infinito e à medida que a largura de todos os retângulos tende a zero:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

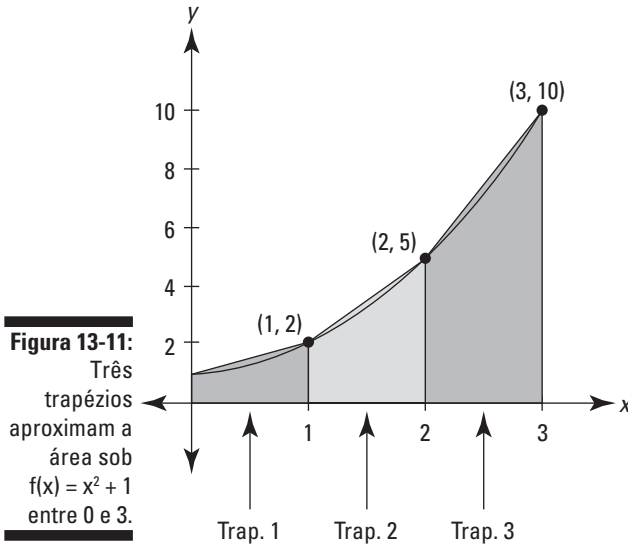
onde Δx_i é a largura de i retângulos e c_i é a coordenada x do ponto onde o i retângulo toca $f(x)$.

Área Aproximada com a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson

O método da área exata não funciona para certos tipos de funções. Está além do objetivo desse livro explicar porque esse é o caso ou como são exatamente essas funções, então apenas leve em conta o que eu digo. A seguir temos mais duas maneiras para estimar a área – em acréscimo a usar o retângulo esquerdo, direito e os pontos médios – que podem ser úteis caso você obtenha uma dessas funções não cooperativas.

A regra do trapézio

Com a regra do trapézio, em vez de aproximar a área com retângulos, você faz isso com, você consegue adivinhar? – trapézios. Veja a Figura 13-11.

Figura 13-11: Três trapézios aproximam a área sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Por causa da maneira como os trapézios abraçam a curva, eles lhe dão uma melhor estimativa da área do que o retângulo esquerdo ou o direito. E no fim das contas a aproximação pelo trapézio é a média das aproximações do retângulo esquerdo e do retângulo direito. Você consegue ver o porquê? (Dica: A área do trapézio – digamos o trapézio 2 na Figura 13-11 – é a média das áreas de dois retângulos correspondentes nas somas dos extremos esquerdos e direitos, a saber, o retângulo número 2 na Figura 13-6 e o retângulo 2 na Figura 13-8).

A Tabela 13-4 lista as aproximações usando os trapézios para a área sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Tabela 13-4 — Estimativas da Área Sob $f(x) = x^2 + 1$ Entre 0 e 3 Dadas pelo Número de Trapézios

Número de trapézios	Área estimada
3	12.5
6	12.125
12	~12.031
24	~12.008
48	~12.002
96	~12.0005
192	~12.0001
384	~12.00003

Ao olhar a Figura 13-11, você talvez espere que uma aproximação usando um trapézio seja melhor do que a estimativa do ponto médio, mas na realidade, como uma regra geral, estimativas usando o ponto médio são mais ou menos duas vezes melhores do que as estimativas usando trapézios. Você pode confirmar isso comparando a Tabela 13-3 e a 13-4. Por exemplo, a Tabela 13-3 lista uma área estimada de 11.990 para 48 retângulos formados pelos pontos médios. Isso difere da área exata de 12 por 0,01. A área estimada com 48 trapézios dados na Tabela 13-4, a saber, 12.002, difere de 12 por duas vezes mais.

Se você já calculou as aproximações dos retângulos com extremos esquerdos e com extremos direitos para uma função em particular e para certo número de retângulos, você pode apenas calcular a média deles para obter a estimativa do trapézio correspondente. Se não, aqui está a fórmula:

A regra do trapézio: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)dx$, com a soma dos ***trapézios*** dada pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais trapézios, melhor é a estimativa.

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots\ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)\right]$$

onde n é o número de trapézios, x_0 é igual a a, e x_1 até x_n são as coordenadas x igualmente espaçadas dos lados direitos dos trapézios de 1 até n.

Mesmo que a definição formal da integral definida seja baseada na soma de um número infinito de ***retângulos***, eu prefiro pensar na integração como sendo o limite da regra do trapézio no infinito. Quando você usa um número de trapézios cada vez maior e depois amplia no local onde os trapezóides tocam a curva, as partes superiores dos trapézios se aproximam cada vez mais da curva. Se você amplia "infinitamente", as partes superiores dos "infinitamente muitos" trapézios ***se tornam*** a curva e, assim, a soma das suas áreas lhe dá a área exata sob a curva. Essa é uma boa maneira de pensar sobre por que a integração produz a área exata – e faz sentido conceitualmente – mas, na verdade, não é feita dessa maneira.

A regra de Simpson – isto é, Thomas (1710–1761), e não Homer (1987–)

Agora eu realmente fico mais sofisticado e desenho formas que são parecidas com trapézios, exceto que em vez de ter partes superiores inclinadas, elas têm partes superiores curvas e parabólicas. Veja a Figura 13-12.

Note que com a regra de Simpson cada "trapézio" tem uma distância de dois intervalos em vez de um; em outras palavras, o "trapézio" número 1 vai de x_0

até x_2, o "trapézio" 2 vai de x_2 até x_4, e assim por diante. Por causa disso, o total de intervalos deve sempre ser dividido em um número par de intervalos.

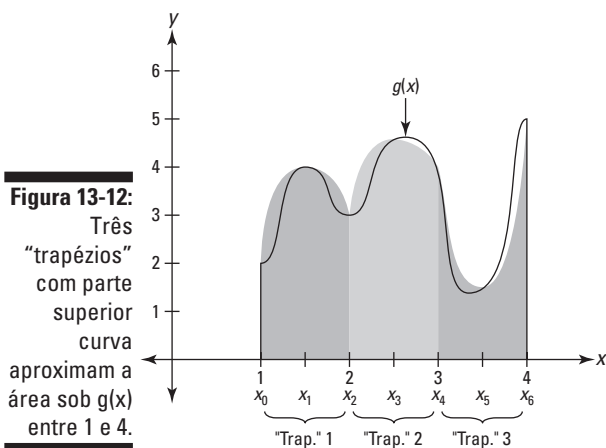



Figura 13-12: Três "trapézios" com parte superior curva aproximam a área sob g(x) entre 1 e 4.

A regra de Simpson é de longe o método de aproximação mais exato discutido nesse capítulo. Na verdade, ele dá a área *exata* para qualquer função polinomial de grau três ou menor. Em geral, a regra de Simpson dá uma estimativa muito melhor do que a regra do ponto médio ou a regra do trapézio.

Uma soma usando a regra de Simpson é um tipo de média ponderada da soma do ponto médio e da soma do trapézio, exceto que você usa a soma do ponto médio duas vezes na média. Então, se você já tem a soma do ponto médio e do trapézio para algum número de retângulos ou trapézios, você pode obter a aproximação pela regra de Simpson com a seguinte média ponderada:

$$S_{2n} = \frac{M_n + M_n + T_n}{3}$$

Note o subscrito $2n$. Isso significa que se você usar, digamos, M_3 ou T_3, você obtém um resultado para S_6. Mas S_6, que tem seis intervalos, tem três "trapézios" curvos porque cada um distancia um do outro em dois intervalos. Assim, a fórmula acima sempre envolve o mesmo número de retângulos, trapézios, e os "trapézios" da regra de Simpson.

Se você não tem a soma do ponto médio e nem do trapézio para o atalho acima, você pode usar a seguinte fórmula para a regra de Simpson.

A regra de Simpson: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)dx$, com a soma de parábolas com a parte superior no formato de "trapézios" dada pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais "trapézios", melhor é a estimativa.

$$S_n = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots\ldots\ldots + 4f(x_{n-1}) + 2f(x_n)\right]$$

onde n é o dobro do número de "trapézios", x_0 até x_n são os pontos igualmente espaçados x_{n-1} de a até b.

Capítulo 14

Integração: Sua Diferenciação ao Contrário

Neste Capítulo

- Fazendo a antidiferenciação – colocando ao contrário
- Usando a função da área
- Familiarizando-se como o Teorema Fundamental do Cálculo
- Encontrando as antiderivadas
- Calculando áreas exatas do jeito fácil

O Capítulo 13 mostra o jeito difícil de calcular a área sob uma função usando a definição formal da integração – o limite da soma de Riemann. Nesse capítulo, eu faço do jeito fácil, tirando vantagem de uma das mais importantes e maravilhosas descobertas da matemática – que a integração é apenas a diferenciação ao contrário.

Antidiferenciação – Isto é, a Diferenciação ao Contrário

A *antidiferenciação* é apenas a diferenciação ao contrário. A derivada de $\sin x$ é $\cos x$, então a antiderivada de $\cos x$ é $\sin x$; a derivada de x^3 é $3x^2$, então a antiderivada de $3x^2$ é x^3 – você apenas faz o inverso. Há mais um pouco a isso, mas essa é a idéia básica. Mais adiante nesse capítulo eu mostro a você como integrar (encontrar áreas) usando as antiderivadas. Isso é *muito* mais fácil do que encontrar áreas com a técnica da soma de Riemann.

Agora considere de novo x^3 e sua derivada $3x^2$. A derivada de $x^3 + 10$ também é $3x^2$, como é a derivada de $x^3 - 5$. Qualquer função na forma $x^3 + C$, onde C é qualquer número, tem uma derivada de $3x^2$. Então, cada semelhante função é uma antiderivada de $3x^2$.

A integral indefinida: A *integral indefinida* de uma função f(x), escrita como $\int f(x)\,dx$, é a família de *todas* as antiderivadas da função. Por exemplo, devido ao fato de a derivada de x^3 ser $3x^2$, a integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, e você escreve:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

Você provavelmente reconhece esse símbolo de integração, $\int$, da discussão sobre a ***integral definida*** no Capítulo 13. O símbolo da integral definida, no entanto, apresenta dois números pequenos como $\int_4^{10}$ que diz a você para calcular a área de uma função entre esses dois pontos, chamados de ***limites da integração***. A versão básica do símbolo, $\int$, indica uma integral ***indefinida*** ou uma ***antiderivada***. Esse capítulo é todo sobre a conexão íntima entre esses dois símbolos.

A Figura 14-1 mostra a família das antiderivadas de $3x^2$, a saber, $x^3 + C$. Note que essa família de curvas tem um número de curvas infinito. Elas sobem e descem para sempre e são infinitamente densas. A lacuna vertical de 2 unidades entre cada curva na Figura 14-1 é apenas uma ajuda visual.

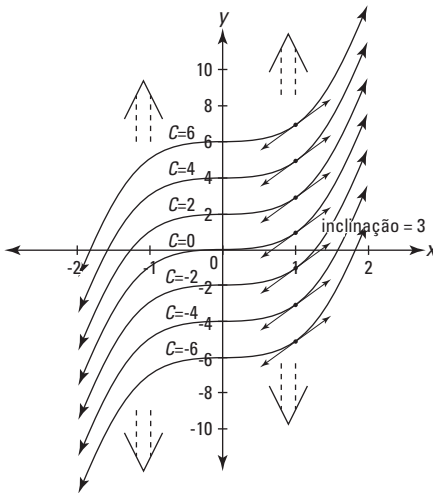



Figura 14-1: A família das curvas $x^3 + C$. Todas essas funções têm a mesma derivada, $3x^2$.

Considere algumas coisas sobre a Figura 14-1. A curva no alto do gráfico é $x^3 + 6$; a debaixo dela é $x^3 + 4$; a da base é $x^3 - 6$. Pela regra da potência, essas três funções, assim como todas as outras nessa família de funções, têm uma derivada de $3x^2$. Agora, considere a inclinação de cada uma das curvas onde x é igual a 1 (veja as retas tangentes desenhadas nas curvas). A derivada de cada curva é $3x^2$, então quando x é igual a 1, a inclinação de cada curva é $3 \cdot 1^2$, ou 3. Dessa forma, todas essas pequenas linhas tangentes são paralelas. Depois, note que todas as funções na Figura 14-1 são idênticas exceto por serem deslizadas para cima ou para baixo (lembra dos deslocamentos verticais do Capítulo 5?). Por que elas diferem somente pelo deslocamento vertical, a inclinação de qualquer valor x, como $x = 1$, é a mesma para todas as curvas. É por isso que todas elas têm a mesma derivada e todas são antiderivadas da mesma função.

Vocabulário, Voshmabulário: Que Diferença Isso Faz?

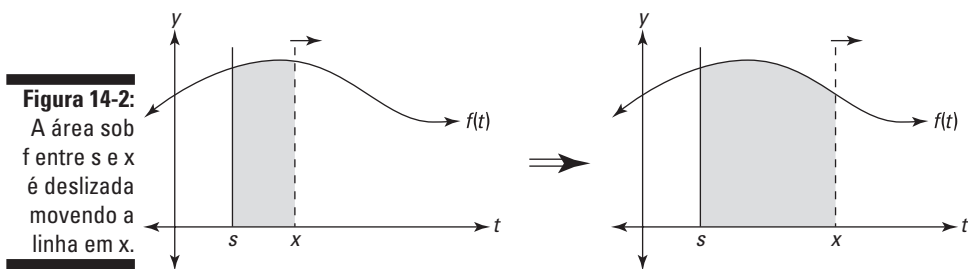
Em geral, definições e vocabulário são muito importantes em matemática, e é uma boa idéia usá-las corretamente. Mas com o tópico atual, eu vou ser um pouco indolente com as terminologias exatas e, com isso, eu lhe dou permissão para fazer a mesma coisa.

Se você for uma pessoa persistente, você deve dizer que *a* integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, que $x^3 + C$ é a família ou o conjunto de *todas* as antiderivadas de $3x^2$ (você não diz que $x^3 + C$ é *a* antiderivada), e que $x^3 + 10$, por exemplo, é *uma* antiderivada de $3x^2$. E em uma prova, você deve definitivamente escrever $\int 3x^2 dx = x^3 + C$. Se você deixar o C de fora, você provavelmente vai perder alguns pontos.

Mas, ao discutir essas questões, ninguém vai se preocupar ou ficar confuso se você cansou de dizer C depois de cada integral indefinida e apenas dizer, por exemplo, que a integral indefinida de $3x^2$ é x^3. E em vez de sempre falar sobre o negócio daquela família de funções, você pode apenas dizer que *a* antiderivada de $3x^2$ é $x^3 + C$ ou que a antiderivada de $3x^2$ é x^3. Todos vão saber o que você quer dizer. Isso pode me custar o meu título de sócio no Conselho Nacional de Professores de Matemática, mas, pelo menos de vez em quando, eu uso essa abordagem flexível.

A Irritante Função da Área

Essa é uma função difícil – se prepare. Digamos que você tenha qualquer função antiga, $f(x)$. Imagine que em algum valor de t, chame de s, você desenhe uma linha vertical fixa. Veja a Figura 14-2.

Figura 14-2: A área sob f entre s e x é deslizada movendo a linha em x.

Depois você pega uma linha vertical móvel, começando no mesmo ponto, s ("s" é para ponto de partida), e leva para a direita. À medida que você leva a linha, você desliza cada vez mais a área sob a curva. Essa área é uma função de x, a posição da linha móvel. Em símbolos, você escreve:

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)dt$$

Note que t é a variável de entrada em $f(t)$ em vez de x porque x já está sendo usada – é a variável de entrada em $A_f(x)$. O subscrito f em $A_f(x)$ indica que $A_f(x)$ é a função da área para a curva em particular f ou $f(t)$. O dt é um pequeno incremento ao longo do eixo t – na verdade um pequeno incremento infinitesimal.

Aqui está um simples exemplo para certificar que você entendeu como uma função da área funciona. A propósito, não se sinta mal se você achar isso extremamente difícil de compreender – você tem muita companhia. Digamos que você tenha uma função simples, $f(t) = 10$ – isto é, uma linha horizontal em $y = 10$. Se você deslizar a área começando em $s = 3$, você terá função da área a seguir:

$$A_f(x) = \int_3^x 10dt$$

Você pode ver que a área deslizada de 3 para 4 é 10 porque, ao levar a reta de 3 até 4, você desliza um retângulo com largura de 1 e altura de 10, que tem uma área de 1 vezes 10, ou 10. Veja a Figura 14-3.

Então, $A_f(4)$, a área deslizada à medida que você alcança 4, é igual a 10. $A_f(5)$ é igual a 20 porque quando você leva a linha para 5, você aumenta um retângulo com uma largura de 2 e altura de 10, que tem uma área de 2 vezes 10, ou 20. $A_f(6)$ é igual a 30, e assim por diante.

Agora, imagine que você leva a linha para direita a uma razão de ***unidade por segundo***. Você começa em $x = 3$, e você alcança 4 em 1 segundo, 5 em 2 segundos, 6 em 3 segundos, e assim sucessivamente. Quanta área você está expandindo por segundo? Dez ***unidades ao quadrado por segundo*** porque você amplia outro retângulo 1 por 10 a cada segundo. Note – isso é grande – que porque a largura de cada retângulo que você deslizada é 1, a área de cada retângulo – que é dada pela ***altura*** vezes a ***largura*** – é a mesma que a sua altura porque qualquer coisa vezes 1 é igual a ela mesma. Você verá porque isso é grande em um minuto.

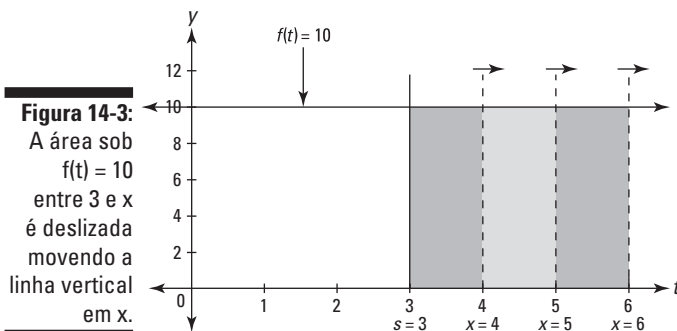



Figura 14-3: A área sob f(t) = 10 entre 3 e x é deslizada movendo a linha vertical em x.

Ok, você está sentado? Você chegou a outro grande momento *Ah ha!* Na história da matemática. Lembre-se que a derivada é uma razão. Então, pelo fato de a razão na qual a função da área anterior aumentar em 10 unidades por segundo ao quadrado, você pode dizer que sua derivada é igual a 10. Assim, você pode escrever –

$$\frac{d}{dx} A_f(x) = 10$$

Novamente, isso apenas diz a você que com cada 1 unidade aumentada em x, A_f (a função da área) aumenta em 10. Agora aqui está a coisa crítica: note que essa razão ou derivada de 10 é a mesma que a altura da função original $f(t) = 10$ porque à medida que você vai ao longo de 1 unidade, você desliza o retângulo que é 1 por 10, que tem uma área de 10, a altura da função.

Isso funciona para qualquer função, não apenas linhas horizontais. Olhe a função $g(t)$ e sua função da área $A_g(x)$ que desliza a área começando em $s = 2$ na Figura 14-4.

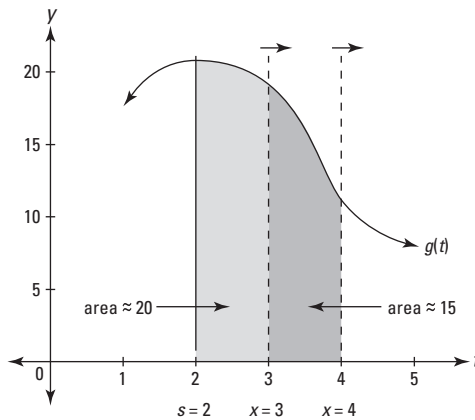



Figura 14-4: A área sob g(t) entre 2 e x é deslizada pela linha vertical em x.

Você pode ver que $A_g(3)$ é mais ou menos 20 porque a área deslizada entre 2 e 3 tem uma largura de 1e a parte superior curva do "retângulo" tem uma altura média de mais ou menos 20. Então, durante esse intervalo, a razão de crescimento de $A_g(x)$ é mais ou menos 20 ***unidades ao quadrado por segundo***. Entre 3 e 4, você desliza mais ou menos 15 unidades ao quadrado de área porque isto é aproximadamente a altura média de $g(t)$ entre 15 e 4. Então, durante o segundo número dois – o intervalo de $x = 3$ até $x = 4$ – a razão de crescimento de $A_g(x)$ é mais ou menos 15.

A ***razão*** da área sendo deslizada sob a curva por uma função da área em um dado valor de x é igual à ***altura*** da curva naquele valor de x.

Eu percebo que estou sendo um pouco flexível – na minha discussão na Figura 14-4 – dizendo coisas do tipo "aproximadamente" isso ou "média" daquilo. Mas leve em conta o que eu digo, quando você faz

os cálculos, tudo dá certo. Você viu no Capítulo 13 que a área sob a curva é aproximadamente cada vez melhor quando números crescentes de retângulos cada vez mais finos são somados, e que a área exata é determinada somando as áreas de um número infinito de retângulos finos infinitos. O mesmo tipo de processo envolvendo limite está acontecendo aqui – as áreas e razões que são "aproximadamente" tais e tais se tornam exatas no limite. O importante para observar é que a velocidade de crescimento da área sob a curva é a mesma que a altura da curva.

O Poder e a Glória do Teorema Fundamental do Cálculo

Soem as trombetas! Agora que você viu a relação entre a razão de crescimento de uma função da área e a altura da curva dada, você está pronto para o Teorema Fundamental do Cálculo – como dizem, é um dos mais importantes teoremas na história da matemática.

O Teorema Fundamental do Cálculo: Dada uma função da área A_f que desliza a área sob $f(t)$,

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)dt,$$

a razão na qual a área está sendo deslizada é igual à altura da função original. Então, porque a razão é a derivada, a derivada da função da área é igual à função original:

$$\frac{d}{dx} A_f(x) = f(x),$$

Porque $A_f(x) = \int_s^x f(t)dt$, você também pode escrever a equação acima como a seguir:

$$\frac{d}{dx} \int_s^x f(t)dt = f(x)$$

É hora de comemorar!

Agora, pelo fato de a derivada de $A_f(x)$ ser $f(x)$, $A_f(x)$ será por definição uma antiderivada de $f(x)$. Veja como isso funciona retornando para a função simples do tópico anterior, $f(t) = 10$, e sua função da área, $A_f(x) = \int_s^x 10dt$.

De acordo com o Teorema Fundamental, $\frac{d}{dx}A_f(x) = 10$. Assim A_f deve ser uma antiderivada de 10; em outras palavras, A_f é uma função cuja derivada é 10. Porque qualquer função na forma $10x + C$, onde C é um número, tem uma derivada de 10, a antiderivada de 10 é $10x + C$. O número em particular C depende da sua escolha de s, o ponto onde você começa a deslizar a área. Para essa função, se você começar a deslizar a área em, digamos, $s = 0$, então $C = 0$, e assim, $A_f\ (x) = \int_0^x 10dt = 10x$. (Note que C não é necessariamente igual a s. Aliás, geralmente não é. A relação entre C e s é explicada no texto complementar "Zero nem sempre é zero" no final desse tópico).

A Figura 14-5 mostra por que $A_f(x) = 10x$ é a função da área correta se você começar a deslizar a área em zero. No primeiro gráfico da figura, a área sob a curva de 0 até 3 é 30, e é dada por $A_f(3) = 10 \cdot 3 = 30$. E você pode ver que a área de 0 até 5 é 50, que concorda com o fato que $A_f(5) = 10 \cdot 5 = 50$.

Título: Antiderivadas excluídas do testamento da família porque elas não têm uma interseção em x

Olhe de volta para a Figura 14-1. Todas as famílias das antiderivadas parecem uma pilha de curvas paralelas subindo e descendo para sempre. Mas somente um subconjunto de cada tipo de família pode ser usado como funções de área — a saber, as antiderivadas que têm pelo menos uma interseção em x (algumas vezes, assim como a Figura 14-1, esse subconjunto é a família completa). Aqui está o porquê: Se uma função da área começa deslizando a área em, digamos, x = 5, $A_f(5)$ deve ser igual a zero porque em 5 nenhuma área foi ainda deslizada. Então a antiderivada para a função da área começando em 5 deve ter uma interseção em x, um zero, em x = 5. Se o deslizamento começar em x = -10 você então usaria a antiderivada com uma interseção em x de -10 e assim por diante. Uma antiderivada sem interseções em x não pode ser usada como função da área. A vergonha, a desgraça!

Se em vez de você começar a deslizar a área em $s = -2$ e definir a nova função da área, $B_f = \int_{-2}^x 10dt$, e definir que C será igual a 20, então B_f (x) será assim $10x + 20$. Essa função da área é 20 mais que $A_f(x)$, que começa em $s = 0$, porque se você começar em $s = -2$, você já vai ter deslizado uma área de 20 até a hora que você chegar ao zero. A Figura 14-5 mostra por que $B_f(3)$ é 20 mais que $A_f(3)$.

$A_f(x)$

$B_f(x)$

$C_f(x)$

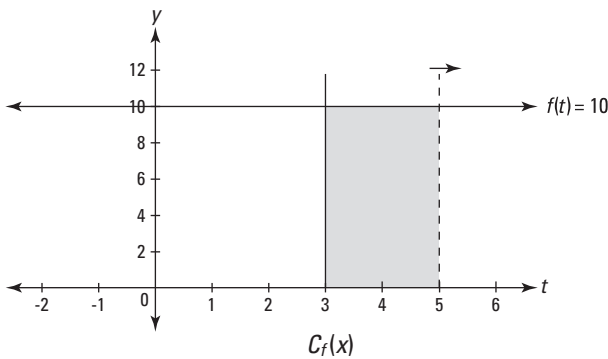
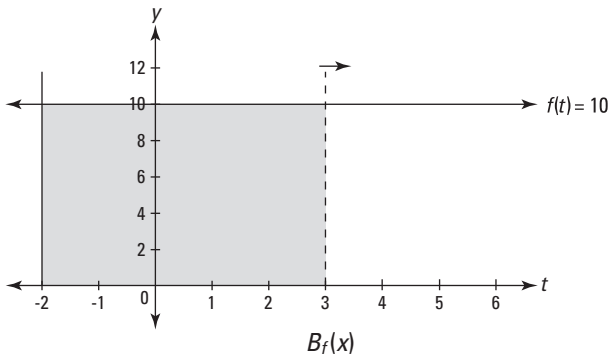
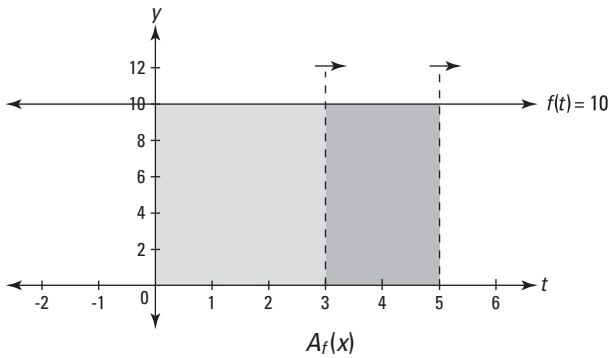



Figura 14-5: Três funções da área para f(t) = 10.

E se você começar a deslizar a área em $s = 3$, a função da área será $C_f = \int_3^x 10dt = 10x - 30$. Essa função é 30 *menos* do que em $A_f(x)$ porque com $C_f(x)$, você perde o retângulo 3 por 10 entre 0 e 3 que $A_f(x)$ tem (veja o último gráfico da Figura 14-5).

A área coberta sob a linha horizontal $f(t) = 10$, de algum número até x, é dada pela antiderivada de 10, a saber, $10x + C$, onde o valor de C depende de onde você começa a deslizar a área.

Para o próximo exemplo, veja novamente a parábola $x^2 + 1$, nosso amigo do Capítulo 13 e a discussão das somas de Riemann. Volte para a Figura 13-6. Agora você finalmente pode calcular a área exata no gráfico do jeito fácil.

A função da área para deslizar a área sob $x^2 + 1$ é $A_t(x) = \int_s^x (t^2 + 1)$. Pelo Teorema Fundamental, $\frac{d}{dx} A_f(x) = x^2 + 1$, e assim A_f é uma antiderivada de $x^2 + 1$. Qualquer função na forma $\frac{1}{3}x^3 + x + C$ tem uma derivada de $x^2 + 1$ (tente), então essa é a antiderivada. Para essa função da área, assim como o exemplo anterior, quando $s = 0$, $C = 0$, e assim

$$A_f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\, dt = \frac{1}{3}x^3 + x$$

A área deslizada de 0 até 3 – que nós fizemos do jeito difícil no Capítulo 13 calculando o limite de uma soma de Riemann – é simplesmente $A_f(3)$:

$$\begin{aligned} A_f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + x \\ A_f(3) &= \frac{1}{3}3^3 + 3 \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Muito fácil. Esse deu *muito, muito* menos trabalho do que fazer do jeito difícil.

Zero nem sempre é zero

Nos dois exemplos f(t) = 10 e f(t) = t^2 + 1, as funções da área que começam em s = 0 têm um valor de 0 para C na antiderivada. Isso é verdade para muitas funções — incluindo todas as funções polinomiais — mas de forma alguma para todas as funções. Para os curiosos, você pode calcular o valor em particular de C dada sua escolha de s igualando a antiderivada a zero, inserindo o valor de s em x, e resolvendo em função de C.

E depois de saber a função da área que começa em zero, $\int_0^x (t^2 + 1)dt = \frac{1}{3}x^3 + x$, fica fácil descobrir a área de outras seções sob a parábola que não começam no zero. Digamos, por exemplo, que você queira a área sob a parábola entre 2 e 3. Você pode calcular a área subtraindo a área entre 0 e 2 da área entre 0 e 3. Você acabou de calcular a área entre 0 e 3, isto é, 12. E a área

entre 0 e 2 é $A_f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 = 4^2/_3$. Então a área entre 2 e 3 é $12 - 4^2/_3$., ou $7^1/_3$. Esse método de subtração nos leva para o próximo tópico – a segunda versão do Teorema Fundamental.

O Teorema Fundamental do Cálculo: Parte Dois

Agora nós finalmente chegamos ao extraordinário atalho do teorema da integração que você vai usar pelo resto dos seus dias – ou pelo menos até o final da sua obrigação com o cálculo. Esse método de atalho é tudo que você precisa para os problemas de integração no Capítulo 16. Mas, primeiro um alerta para ter em mente ao fazer a integração.

Ao usar uma função da área, a primeira versão do Teorema Fundamental do Cálculo ou sua segunda versão, as áreas ***abaixo*** do eixo x são ditas áreas ***negativas***. Veja o Capítulo 13 para mais sobre áreas negativas.

O Teorema Fundamental do Cálculo (versão de atalho): Deixe F ser qualquer antiderivada da função f; assim

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Esse teorema lhe dá o maravilhoso atalho para calcular a integral definida como $\int_2^3 (x^2 + 1)dx$, a área sob a parábola $x^2 + 1$ entre 2 e 3. Como eu mostrei no tópico anterior, você pode obter essa área subtraindo a área entre 0 e 2 da área entre 0 e 3, mas para fazer isso você precisa saber que a função da área em particular deslizando a área começando em zero, $\int_0^x (t^2 + 1)\, dt$, é $\frac{1}{3}x^3 + x$ (com C igual a zero).

A beleza do teorema do atalho é que você não tem nem que usar uma função da área como $A_f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)dt$. Você apenas acha qualquer antiderivada, $F(x)$, da sua função, e faz a subtração, $F(b) - F(a)$. A antiderivada mais simples para usar é aquela onde $C = 0$. Então aqui está como você usa o teorema pra descobrir a área sob nosso parábola de 2 até 3.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ é uma antiderivada de $x^2 + 1$ então, pelo teorema,

$$\int_2^3 (x^2 +)dx = F(3) - F(2)$$

$F(3) - F(2)$ pode ser escrito como $\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$, e assim,

$$\int_2^3 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 3\right)$$

$$= 12 - 4^2/_3$$

$$= 7^1/_3$$

Eu concordo, esse é o mesmo cálculo que fiz no tópico anterior usando a função da área com $s = 0$, mas isso é somente porque para a função $x^2 + 1$, onde s é zero, C também é zero. É um tipo de coincidência, e não é verdade para todas as funções. Mas independente da função, o atalho funciona, e você não tem que se preocupar sobre funções da área ou s ou C. Tudo o que você faz é $F(b) - F(a)$.

Aqui está outro exemplo: Qual é a área sob $f(x) = e^x$ entre $x = 3$ e $x = 5$? A derivada de e^x é e^x, então e^x é uma antiderivada de e^x, e assim

$$\int_2^5 e^x\, dx = \left[e^x\right]_3^3 \quad 5$$

$$= e^5 - e^3$$

$$\approx 148.4 - 20.1$$

$$\approx 128.3$$

O que poderia ser mais simples? E se um grande atalho não for o suficiente para fazer o seu dia, a Tabela 14-1 lista alguma regras sobre as integrais definidas que podem fazer sua vida muito mais fácil.

Tabela 14-1 Cinco Regras Fáceis para Integrais Definidas

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Bem, é claro — não há área "entre" a e a)

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4) $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k é uma constante; você pode tirar uma constante da integral)

5) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

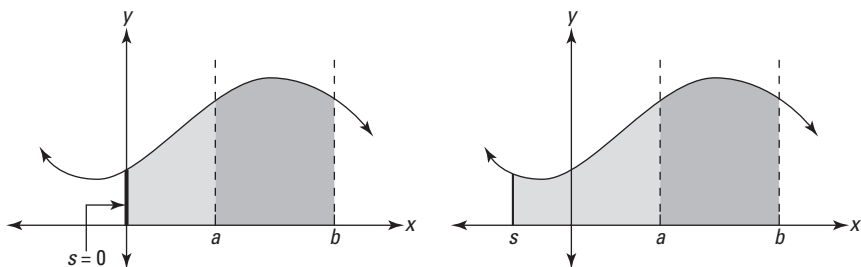
Agora que eu mostrei o atalho, isso não significa que você esteja fora de perigo. Aqui estão três maneiras totalmente diferentes de entender por que a segunda versão do Teorema Fundamental funciona. Isso é coisa difícil – prepare-se.

Por outro lado, você pode pular essas explicações se tudo o que você quer é saber como calcular uma área: esqueça *C* e apenas subtraia *F(a)* de *F(b)*. Eu incluo essas explicações porque eu suspeito que algum de vocês esteja doido para aprender matemática extra apenas pelo prazer de aprender – certo? Outros livros apenas dão as regras; eu explico por que elas funcionam e os princípios básicos – é por isso que eles me pagam muito dinheiro.

Na verdade, não pule a terceira explicação, "Por que o teorema funciona: A relação entre integração / diferenciação". É a melhor das três porque mostra a relação ying/yang entre a integração e a diferenciação.

Por que o teorema funciona: 1ª explicação das funções da área

Uma forma de entender o Teorema Fundamental é olhando as funções da área. Como você pode ver na Figura 14-6, a área entre *a* e *b* pode ser calculada começando com a área entre *s* e *b*, depois subtraindo a área entre s e a. E não importa se você usa o 0 como o lado esquerdo das áreas ou qualquer outro valor de *s*.

Figura 14-6: Descobrindo a área entre a e b com duas funções da área diferentes.

Dê uma olhada em $f(t)$ = 10 (veja a Figura 14-7) para tornar essa discussão menos abstrata. Digamos que você queira a área entre 5 e 8 sob a linha horizontal $f(t)$ = 10, e você seja forçado a usar o cálculo.

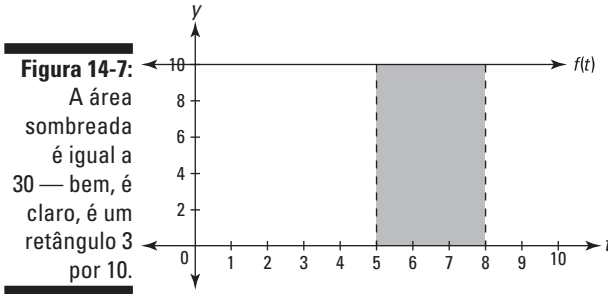



Figura 14-7: A área sombreada é igual a 30 — bem, é claro, é um retângulo 3 por 10.

Dê uma olhada em duas das funções da área para $f(t)$ = 10 na Figura 14-5: $A_f(x)$ começando em 0 (no qual C = 0) e $B_f(x)$ começando em –2 (C = 20):

$$A_t(x) = \int_0^x 10dt = 10x$$

$$B_t(x) = \int_{-2}^x 10dt = 10x + 20$$

Se você usar $A_f(x)$ para calcular a área entre 5 e 8 na Figura 14-7, você obtém o seguinte:

$$\int_5^8 10dt = A_t(8) - A_t(5)$$

$$= 10 . 8 - 10 . 5$$

$$= 80 - 50$$ (80 é a área do retângulo de 0 até 8; 50 é a área do retângulo de 0 até 5)

$$= 30$$

Se, por outro lado, você usa $B_f(x)$ para calcular a mesma área, você obtém o mesmo resultado:

$$\int_5^8 10dt = B_f(8) - B_f(5)$$

$$= 10 \cdot 8 + 20 - (10 \cdot 5 + 20)$$

$$= 80 + 20 - (50 + 20)$$ (isto é 100 – 70, é claro; 100 é a área do retângulo de -2 até 8; 70 é o retângulo de –2 até 5)

$$= 80 + 20 - 50 - 20$$

$$= 80 - 50$$

$$= 30$$

Note que os dois 20 na terceira linha dessa parte de baixo se cancelam. Lembre-se que todas as antiderivadas de $f(t)$ = 10 estão na forma $10x$ +

C. Apesar do valor de C, ele cancela assim como nesse exemplo. Assim, você pode usar qualquer antiderivada com qualquer valor de C. Por conveniência, todos usam a antiderivada apenas com $C = 0$, então não se meta com C de maneira nenhuma. E a escolha de s (o ponto onde a função da área começa) é irrelevante.

Por que o teorema funciona: 2ª explicação das funções da área

Aqui está outra maneira de ver o que está acontecendo com o Teorema Fundamental quando você subtrai $F(a)$ de $F(b)$. O oposto de $F(a)$ é na verdade o valor de C para a função da área para f que começa em $s = a$. Dê uma olhada em um exemplo: Qual é a área entre 2 e 3 sob $x^2 + 10$?

$$\begin{aligned}\int_2^3 (x^2+10)\,dx &= F(3) - F(2)\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 10x\right]_2^3\\ &= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 10\cdot 2\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - 22^2/_3\end{aligned}$$

Você pode ver que $F(2)$ é $22^2/_3$. Se você usar o oposto disso, $-22^2/_3$, para seu valor de C, você tem a função da área para $x^2 + 10$ que começa a deslizar a área em 2. Em outras palavras,

$$A_f(x) = \int_2^x (t^2+10)\,dt = \frac{1}{3}x^3 + 10x - 22^2/_3 \text{, e assim}$$

$$A_f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - 22^2/_3$$

Isso é idêntico à última linha do cálculo anterior. Assim, encontrar a área entre 2 e 3 subtraindo $F(2)$ de $F(3)$ é matematicamente equivalente a calcular $A_f(3)$ para a função da área que começa em $s = 2$.

Por que o teorema funciona: A relação integração / diferenciação

Eu sei, eu sei. Você está perguntando, "Uma terceira explicação?". Ok. Talvez eu tenha ido longe demais com todas essas explicações, mas não pule essa aqui – é a melhor maneira de entender a segunda versão do Teorema Fundamental e por que a integração é o inverso da diferenciação. Aceite o que eu digo – vale a pena o esforço. Considere a Figura 14-8.

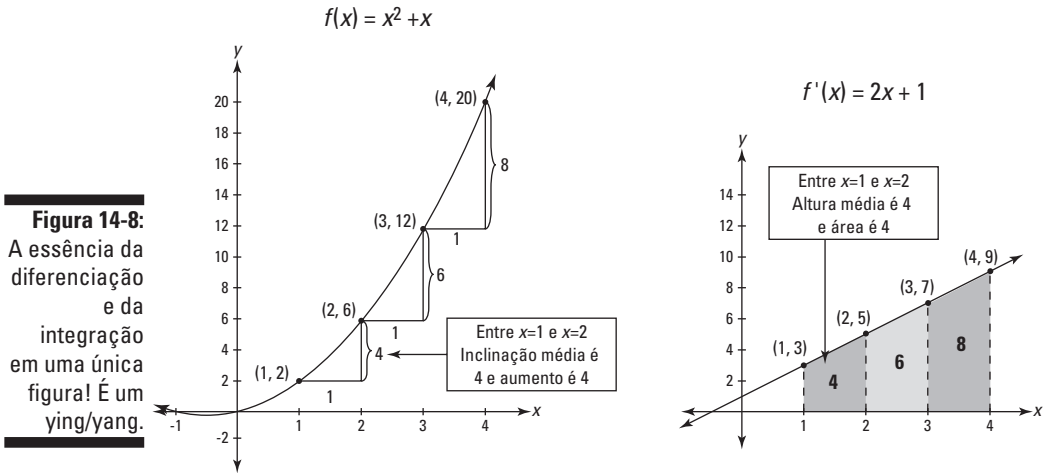



Figura 14-8: A essência da diferenciação e da integração em uma única figura! É um ying/yang.

A Figura 14-8 mostra a função, $x^2 + x$, e sua derivada, $2x + 1$. Olhe com cuidado para os números 4, 6, e 8 em ambos os gráficos. A conexão entre 4, 6, e 8 no gráfico de f – que são os valores de ***aumento*** entre os pontos subseqüentes na curva – e 4, 6, e 8 no gráfico de f' – que são as ***áreas*** dos trapézios sob f' – mostra uma relação íntima entre a integração e a diferenciação. A Figura 14-8 é provavelmente a figura mais importante nesse livro. É uma figura que vale por mil símbolos e equações, envolvendo a essência da integração em uma única fotografia. Ela mostra como a segunda versão do Teorema Fundamental funciona porque ela mostra que a área sob $2x + 1$ entre 1 e 4 é igual ao ***aumento*** total de f entre (1, 2) e (4, 20), em outras palavras que

$$\int_1^4 f'(x)\, dx = f(4) - f(1)$$

Note que eu chamei as duas funções na Figura 14-8 e na equação f acima e em f' para enfatizar que $2x + 1$ é a ***derivada*** de $x^2 + x$. Eu poderia ter chamado $x^2 + x$ de F e chamado $2x + 1$ de f, o que enfatizaria que $x^2 + x$ é uma ***antiderivada*** de $2x + 1$. Nesse caso você escreveria a equação da área anterior na forma padrão,

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \mathrm{F}(4) - F(1)$$

Qualquer uma das duas maneiras, o significado é o mesmo. Eu uso a versão da derivada para mostrar que encontrar a área é a diferenciação ao contrário. Indo da esquerda para a direita na Figura 14-8 você tem a diferenciação: As alturas em f' lhe dão as inclinações de f. Indo da direita para a esquerda você tem a integração: A mudança entre duas alturas em f lhe dá uma área sob f'.

Ok. Aqui está como funciona. Imagine que você esteja subindo ao longo de f de (1, 2) até (2, 6). Cada ponto ao longo do caminho tem certo declive, uma inclinação. Essa inclinação é esboçada como a coordenada y, ou altura, no gráfico de f'. O fato de f' subir de (1, 3) até (2, 5) diz a você que a inclinação de f sobe de 3 para 5 à medida que você viaja entre (1, 2) e (2, 6). Isso tudo vem da diferenciação básica.

Agora, à medida que você segue em *f* de (1, 2) até (2, 6), a inclinação está constantemente mudando. Mas descobrimos que você tem um ***aumento*** total de 4 à medida que ***desliza*** de 1 para a direita, a média de todas as inclinações em *f* entre (1, 2) e (2, 6) é $\frac{4}{1}$, ou 4. Visto que cada uma dessas inclinações é esboçada como uma coordenada *y* ou altura em *f'*, segue que a altura média de *f'* entre (1, 3) e (2, 5) também é 4. Assim, entre dois pontos dados, a inclinação média em *f* é igual à altura média em *f'*.

Só um minuto, você está quase lá. A ***inclinação*** é igual a $\frac{aumento}{distância}$, então quando a distância é 1, a inclinação é igual ao aumento. Por exemplo, de (1, 2) até (2, 6) em *f*, a curva aumenta em 4 e a inclinação média entre esses pontos também é 4. Assim, entre dois pontos dados em *f*, a inclinação média ***é*** o aumento.

A área de um trapézio como os da direta na Figura 14-8 é igual à largura vezes a sua altura média (Isso é verdade sobre qualquer outra forma semelhante que tenha uma base parecida com um retângulo; o topo pode ser qualquer linha deformada ou qualquer curva que você quiser). Então, devido ao fato de a largura de cada trapézio ser 1, e porque qualquer coisa vezes 1 é ela mesma, a altura média de cada trapézio sob *f'* é a sua área; por exemplo, a área desse primeiro trapézio é 4 e sua altura média também é 4.

Você está pronto para o grand finale? Aqui está o argumento completo em poucas palavras. Em *f*, ***aumento*** = ***inclinação média***; indo de *f* até *f'*, ***inclinação média*** = ***altura média***; em *f'*, ***altura média*** = ***área***. Então isso lhe dá ***aumento*** = ***inclinação*** = ***altura*** = ***área***, e assim, finalmente, ***aumento*** = ***área***. E isso é o que a segunda versão do Teorema Fundamental diz:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\text{Área} = \text{aumento}$$

Muito fácil, não é? (Isso é apenas um palpite, mas para a eventualidade de você achar isso não muito claro, eu acho que não vai fazer muita diferença para você que eu esteja satisfeito com o que acabei de escrever). Deixando as brincadeiras de lado, isso é inevitavelmente difícil. Você talvez tenha que ler duas ou três vezes para realmente entender.

Note que não faz diferença para a relação entre a inclinação e a área se você usar qualquer outra função na forma $x^2 + x + C$ em vez de $x^2 + x$. Qualquer parábola do tipo $x^2 + x + 10$ ou $x^2 + x + 5$ é exatamente da mesma forma que $x^2 + x$ – ela acabou de ser deslizada para cima ou para baixo verticalmente. Qualquer parábola desse tipo aumenta entre $x = 1$ e $x = 4$ da mesma forma que a parábola na Figura 14-8. De 1 até 2 essas parábolas correm 1 e sobem 4. De 2 para 3 elas correm 1 sobem 6, e assim por diante. É por isso que qualquer antiderivada pode ser usada para encontrar a área.

A *área* total sob *f'* entre 1 e 4, a saber, 18, corresponde ao *aumento* total em qualquer uma dessas parábolas de 1 até 4, a saber, 4 + 6 + 8, ou 18.

Bem, aí está – explicações reais sobre por que a versão do atalho do Teorema Fundamental funciona e por que encontrar a área é a diferenciação ao inverso. Se você entendeu apenas metade do que eu acabei de escrever, você está bem a frente da maioria dos alunos de cálculo. A boa notícia é que você provavelmente não vai ser avaliado nessa parte teórica.

Agora vamos voltar para a realidade.

Encontrando as Antiderivadas: Três Técnicas Básicas

Eu venho falando um bocado sobre as antiderivadas, mas como é que você as encontra? Nesse tópico, eu mostro a você três técnicas básicas. Depois, no Capítulo 15, eu mostro quatro técnicas avançadas. Se você está curioso, você *vai* ser avaliado nisso.

Regras inversas para as antiderivadas

As regras de antiderivadas mais fáceis são aquelas que são o inverso das regras das derivadas que você já sabe (Você pode revisar as regras das derivadas no Capítulo 10 se precisar). Essas são automáticas, antiderivadas com apenas um passo, com exceção da regra da potência ao inverso que é a única mais ou menos difícil.

Regras inversas óbvias

Você sabe que a derivada do sen$x$ é o cos$x$, então invertendo isso você tem que a antiderivada do cos$x$ é o sen$x$. O que poderia ser mais simples? Mas não esqueça que todas as funções da forma sen$x + C$ são antiderivadas do cos$x$. Em símbolos, você escreve

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x, \text{ e conseqüentemente}$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + C$$

Tabela 14-2 lista as regras inversas para as antiderivadas.

Tabela 14-2 **Formulas Básicas para as Antiderivados**

1) $\int dx = x + C$	2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$
3) $\int e^x\, dx = e^x + C$	4) $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	
6) $\int \text{sen}x\, dx = -\cos x + C$	7) $\int \cos x\, dx = \text{sen}x + C$
8) $\int \sec^2 x\, dx = \text{tg}x + C$	9) $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotg}x + C$
10) $\int \sec x\, \text{tg}x\, dx = \sec x + C$	11) $\int \text{cosec}x\, \text{cotg}x\, dx = -\text{cosec}x + C$
12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{a} + C$	13) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$
14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsen}\frac{\lvert x \rvert}{a} + C$	

A mais ou menos difícil regra inversa da potência

Pela regra da potência, você sabe que

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \text{ e conseqüentemente}$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Aqui está o método simples para inverter a regra da potência. Use $5x^4$ para sua função. Lembre que a regra da potência diz para:

1. Trazer a potência para frente onde vai *multiplicar* o resto da derivada.

$5x^4 \rightarrow 4 \cdot 5x^4$

2. Reduzir a potência em 1 e simplificar.

$4 \cdot 5x^4 \rightarrow 4 \cdot 5x^3 = 20x^3$

Para inverter o processo, você inverte a ordem dos dois passos e inverte a conta dentro de cada passo. Aqui está como isso funciona para o problema anterior:

1. ***Aumente* a potência em um.**

   O 3 se torna um 4.

   $20x^3 \rightarrow 20x^4$

2. ***Divida* pela nova potência e simplifique.**

   $20x^4 \rightarrow \frac{20}{4}x^4 = 5x^4$

   E assim você escreve $\int 20x^3\,dx = 5x^4 + C$.

Sobretudo quando você é novo em antidiferenciação, é uma boa ideia verificar as suas antiderivadas fazendo a diferenciação delas – você pode ignorar o C. Se você voltar para a sua função original, você sabe que sua antiderivada está correta.

Com a antiderivada encontrada e a segunda versão do Teorema Fundamental, você pode determinar a área sob $20x^3$ entre, digamos, 1 e 2:

$$\int 20x^3\,dx = 5x^4 + C \text{ , assim}$$

$$\int_1^2 20x^3\,dx = \left[5x^4\right]_1^2$$

$$= 5 \cdot 2^4 - 5 \cdot 1^4$$

$$= 80 - 5$$

$$= 75$$

Adivinhando e verificando

O método de adivinhar e verificar funciona quando o ***integrando*** – isto é, a coisa que você quer antidiferenciar (a expressão depois do símbolo da integral não contando o dx) – está perto de uma função da qual você conhece a regra inversa. Por exemplo, digamos que você queira a antiderivada de $\cos(2x)$. Bem, você sabe que a derivada do seno é o cosseno. Invertendo isso você tem que a antiderivada do cosseno é o seno. Então você talvez pense que a antiderivada do $\cos(2x)$ é $\text{sen}(2x)$. Esse é o seu ***palpite***. Agora ***verifique*** isso fazendo a diferenciação para ver se você obteve a função original, $\cos(2x)$:

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(2x)$$

$$= \cos(2x) \cdot 2 \quad \text{(regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 2\cos(2x)$$

Esse resultado é muito perto da função original, exceto pelo coeficiente extra de 2. Em outras palavras, a resposta é 2 vezes tanto quanto o que você quiser.

Pelo fato de você querer um resultado que é metade desse, tente apenas uma antiderivada que é metade do seu primeiro palpite: $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$. Verifique esse segundo palpite diferenciando-o, e você obterá o resultado desejado.

Aqui está outro exemplo. Qual é a antiderivada de $(3x-2)^4$?

1. **Adivinhe a antiderivada.**

   Esse parece um problema sobre a regra da potência, então tente a regra inversa da potência. A antiderivada de x^4 é $\frac{1}{5}x^5$ pela regra inversa da potência, então seu palpite é $\frac{1}{5}(3x-2)^5$.

2. **Verifique o seu palpite fazendo a diferenciação dele.**

   $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}(3x-2)^5\right]$$

   $= 5 \cdot \frac{1}{5}(3x-2)^4 \cdot 3$ (regra da potência e regra da cadeia)

   $= 3(3x-2)^4$

3. **Ajuste o seu primeiro palpite.**

   Seu resultado, $3(3x-2)^4$, é três vezes mais do que o suficiente, então dê o seu segundo palpite um terço do seu primeiro palpite – isto é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(3x-2)^5$, ou $\frac{1}{15}(3x-2)^5$.

4. **Verifique o seu segundo palpite fazendo a diferenciação dele.**

   $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{15}(3x-2)^5\right]$$

   $= 5 \cdot \frac{1}{15}(3x-2)^4 \cdot 3$ (regra da potência e regra da cadeia)

   $= (3x-2)^4$

   Está certo. Você terminou. A antiderivada de $(3x-2)^4$ é $\frac{1}{15}(3x-2)^5 + C$.

Os dois exemplos anteriores mostram que *adivinhar* e *verificar* funciona bem quando a função que você quer antidiferenciar tem um argumento do tipo $3x$ ou $3x+2$ (onde x é elevado a *primeira* potência) em vez de um x simples (Lembre-se que em uma função como $\sqrt{5x}$, o $5x$ é chamado de *argumento*). Nesse caso, tudo o que você tem que fazer é ajustar o seu palpite pelo *recíproco* do coeficiente de x – o 3 em $3x+2$, por exemplo (o 2 em $3x+$

2 não afeta a sua resposta). Na verdade, para esses problemas fáceis, você não tem que realmente fazer qualquer adivinhação e verificação. Você pode ver imediatamente como ajustar o seu palpite. Ele se torna um tipo de processo de um passo. Se o argumento da função for mais complicado do que $3x + 2$ – como o x^2 em $\cos(x^2)$ – você tem que tentar o próximo método, a substituição.

O método da substituição

Se você voltar a olhar os exemplos sobre o método de adivinhar e verificar no tópico anterior, você poderá ver por que o primeiro palpite em cada caso não funcionou. Quando você diferencia o primeiro palpite, a regra da cadeia produz uma constante extra: 2 no primeiro exemplo, 3 no segundo. Você então ajusta os palpites com $^1/_2$ e $^1/_3$ para recompensar pela constante extra.

Agora digamos que você queira a antiderivada do $\cos(x^2)$ e você palpite que é $\text{sen}(x^2)$. Veja o que acontece quando você diferencia o $\text{sen}(x^2)$ para verificá-lo.

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x^2)$$

$$\text{con}(x^2)\ .2x \qquad \text{(regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

Aqui a regra da cadeia produz um $2x$ extra – porque a derivada de x^2 é $2x$ – mas se você tentar recompensar isso anexando um $\frac{1}{2x}$ ao seu palpite, não irá funcionar. Tente.

Então, adivinhando e palpitando não funciona para a antidiferenciar o $\cos(x^2)$ – na verdade ***nenhum*** método funciona para esse integrando de aparência simples (nem todas as funções têm antiderivadas) – mas seu admirável empenho na diferenciação aqui revela uma nova classe de funções que você pode antidiferenciar. Visto que a derivada do $\text{sen}(x^2)$ é $2x\cos(x^2)$, a antiderivada de $2x\cos(x^2)$ deve ser $\text{sen}(x^2)$. Essa função, $2x\cos(x^2)$, é o tipo de função que você pode antidiferenciar com o método da substituição.

O método da substituição funciona quando o integrando contém uma função e a ***derivada do argumento da função*** – em outras palavras, quando ele contém aquela coisa extra produzida pela regra da cadeia – ou alguma coisa parecida com isso exceto pela constante. E o integrando não deve conter mais nada.

A derivada de e^{x^3} é $e^{x^3}\ .3x^2$ pela regra do e^x e pela regra da cadeia. Então, a antiderivada de $e^{x^3}\ .3x^2$ é e^{x^3}. E se pedisseem para você achar a antiderivada de $e^{x^3}\ .3x^2$, você saberia que o método da substituição funcionaria porque essa expressão contém $3x^2$, que é a derivada do argumento de e^{x^3}, a saber, x^3.

A esta altura, você está provavelmente se perguntando por que isso é chamado de método da substituição. Eu mostro a você o porquê no método passo a passo abaixo. Mas primeiro, eu quero mostrar que você nem sempre tem que usar o método passo a passo. Supondo que você entenda por que a antiderivada de $e^{x^3} . 3x^2$ é e^{x^3},, você pode se deparar com problemas onde você pode apenas ver a antiderivada sem ter nenhum trabalho. Mas se você pode ou não apenas ver as respostas para problemas como o anterior, o método da substituição é uma boa técnica para aprender porque, por um lado, ele tem muita utilidade em cálculo e em outras áreas da matemática, e por outro, seu professor pode exigir que você o saiba e o use. Ok. Aqui está como encontrar a antiderivada de $\int 2x\cos(x^2)\,dx$ com a substituição.

1. **Iguale *u* ao argumento da função principal.**

   O argumento do $\cos(x^2)$ é x^2, então você iguala x^2 a u.

2. **Ache a derivada de *u* em relação à *x*.**

   $u = x^2$ ou $\frac{du}{dx} = 2x$

3. **Resolva em função de *dx*.**

   $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{1}$

   $du = 2xdx$ (multiplicação cruzada)

   $\frac{du}{2x} = dx$ (divida ambos os lados por $2x$)

4. **Faça as substituições.**

   Em $\int 2x\cos(x^2)dx$, u toma o lugar de x^2 e $\frac{du}{2x}$ toma o lugar de dx. Então agora você tem $\int 2x\cos u\frac{du}{2x}$. Os dois $2x$ se cancelam, dando $\int 2x\cos u du$.

5. **Faça a antidiferenciação usando a regra inversa simples.**

   $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$

6. **Coloque x^2 de volta no lugar de *u* – fazendo o ciclo completo.**

   u é igual a x^2, então x^2 entra no lugar de u:

   $\int \cos u du = \operatorname{sen} u\ (x^2) + C$

   É isso. Então $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C$.

Se o problema original tivesse sido $\int 5x\cos(x^2)\,dx$ em vez de $\int 2x\cos(x^2)$ dx, você seguiria os mesmos passos exceto o passo 4, depois de fazer a substituição, você chega em $\int 5x\cos u\frac{du}{2x}$. Os x ainda se cancelam – essa é a coisa importante – mas depois de cancelar você tem $\int \frac{5}{2}\cos u du$, que tem um $\frac{5}{2}$ extra. Não se preocupe. Apenas puxe o $\frac{5}{2}$ através do símbolo

$\int$, lhe dando $\frac{5}{2}\int \cos u du$. Agora você termina esse problema assim como fez acima nos passos 5 e 6, exceto pelo $\frac{5}{2}$ extra.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\int \cos u du &= \frac{5}{2}(\operatorname{sen} u + C)\\ &= \frac{5}{2}\operatorname{sen} u + \frac{5}{2}C\\ &= \frac{5}{2}\operatorname{sen}(x^2) + \frac{5}{2}C\end{aligned}$$

Pelo fato de C ser qualquer velha constante, $\frac{5}{2}C$ ainda é qualquer velha constante, então você pode se livrar do $\frac{5}{2}$ na frente de C. Isso pode parecer um tanto (excessivamente?) não matemático, mas está certo. Assim, a sua resposta final é $\frac{5}{2}\operatorname{sen}(x^2) + C$. Você deve verificar a sua resposta usando a diferenciação.

Aqui estão uns poucos exemplos de antiderivadas que você pode fazer com o método da substituição de modo que você possa aprender como distingui-los.

- $\int 4x^2\cos(x^3)dx$

  A derivada de x^3 é $3x^2$, mas você não tem que prestar nenhuma atenção ao 3 em $3x^2$ ou ao 4 no integrando. Pelo fato de o integrando conter x^2 e não conter qualquer outra coisa extra, a substituição funciona. Tente.

- $\int 10\sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x} dx$

  O integrando contém uma função, $e^{\operatorname{tg} x}$, e a derivada do seu argumento, $\operatorname{tg} x$ – que é $\sec^2 x$. Pelo fato de o integrando não conter qualquer outra coisa extra (exceto pelo 10, que não importa), a substituição funciona. Faça.

- $\int \frac{2}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$

  Pelo fato de o integrando conter a derivada do $\operatorname{sen} x$, a saber, $\cos x$, e nenhuma outra coisa exceto pelo $^2/_3$, a substituição funciona. Vai nessa.

Ei, eu acabei de ter uma grande ideia (Isso mesmo. Eu ainda estou aprendendo). Você pode fazer os três problemas listados com um método que combina a substituição e o método da adivinhação e da verificação (desde que seu professor não insista para você mostrar os seis passos da solução da substituição). Tente usar esse método de combinação para antidiferenciar o primeiro exemplo, $\int 4x^2\cos(x^3)dx$. Primeiramente, você confirma que a integral se enquadra no padrão para a substituição – ela se enquadra, como mostrado no primeiro item da lista. Essa confirmação é a única parte que a substituição faz no método da combinação. Agora você termina o problema com o método da adivinhação e da verificação.

1. **Dê o seu palpite.**

   A antiderivada do cosseno é o seno, então um bom palpite para a antiderivada de $4x^2\cos(x^3)$ é $\text{sen}(x^3)$. Dê o seu palpite.

2. **Verifique o seu palpite fazendo a diferenciação dele.**

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x^3) = \cos(x^3)\ .3x^2 \text{ (regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 3x^2\cos(x^3)$$

3. **Ajuste o seu palpite.**

   Seu resultado do passo 2, $3x^2(x^3)$, é $^3/_4$ do que você quer, $4x^2\cos(x^3)$, então dê o seu palpite é $^4/_3$ maior (note que $^4/_3$ é o recíproco de $^3/_4$). Seu segundo palpite é assim $\frac{4}{3}\text{sen}(x^3)$.

4. **Verifique esse segundo palpite fazendo a diferenciação dele.**

   Ah, droga, pule isso – sua resposta tem que funcionar.

Encontrando a Área com Problemas de Substituição

Você pode usar o Teorema Fundamental para calcular a área sob uma função que você integra com o método da substituição. Você pode fazer isso de duas maneiras. No tópico anterior, eu uso a substituição, colocando u igual a x^2, para encontrar a antiderivada doe $2x\cos(x^2)$.

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \text{sen}(x^2) + C$$

Se você quer a área sob essa curva de, digamos, ½ até 1, o Teorema Fundamental faz a mágica:

$$\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx = \left[\text{sen}(x^2)\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \text{sen}(1^2) - \text{sen}\left((^1/_2)^2\right)$$

$$= \text{sen } 1 - \text{sen } (^1/_4)$$

$$\approx 0.841 - 0.247$$

$$\approx 0.594$$

Outro método, que corresponde à mesma coisa, é mudar os limites da integração e fazer o problema todo em relação a u. Consulte a solução de seis passos no tópico "O método da substituição". O que vem a seguir é muito semelhante, exceto que dessa vez você está fazendo a integração

definida no lugar da integração indefinida. De novo, você quer a área dada por $\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx$.

1. **Iguale *u* ao x^2.**

2. **Ache a derivada de *u* em relação à *x*.**

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

3. **Resolva em função de *dx*.**

$$dx = \frac{du}{2x}$$

4. **Determine os novos limites da integração.**

$$u = x^2 \text{ então quando } x = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{4}$$
$$\text{e quando } x = 1, u = 1$$

5. **Faça as substituições, incluindo os novos limites da integração, e cancele os dois 2*x*.**

   Neste problema somente um dos limites é novo porque quando x=1, u=1

$$\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx$$
$$= \int_{1/4}^{1} 2x\cos u\,\frac{du}{2x}$$
$$= \int_{1/4}^{1} \cos u\,du$$

6. **Use a antiderivada e o Teorema Fundamental para obter a área desejada sem ter que voltar para x^2.**

$$\int_{1/4}^{1} \cos u\,du = [\operatorname{sen} u]_{1/4}^{1}$$
$$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}\frac{1}{4}$$
$$\approx 0.594$$

É um caso de seis de um, meia dúzia de outro com os dois métodos. Ambos exigem a mesma quantidade de trabalho. Faça a sua escolha.

Capítulo 15

Técnicas de Integração Para Especialistas

Neste Capítulo

- Decompondo as integrais em partes
- Encontrando integrais trigonométricas
- Voltando às origens com *SohCahToa*
- Entendendo os *As*, *Bs*, e *Cxs* das frações parciais
- *LIATE*: Logarítmicas, inversas de trigonométricas, algébricas, trigonométricas, exponenciais

Eu imagino que não doeria lhe dar uma folga do tipo de fundamentação teórica que eu apresentei de forma bem pesada no Capítulo 14, então esse capítulo vai direto ao ponto e mostra apenas os detalhes práticos de muitas técnicas de integração. Você viu três métodos básicos de integração no Capítulo 14: as regras inversas, o método de adivinhar e verificar, e a substituição. Agora você vai se qualificar em quatro técnicas avançadas: integração por partes, integrais trigonométricas, substituição trigonométrica e frações parciais. Você está pronto?

Integração por Partes: Dividir Para Conquistas

Integrando por partes é a versão da integração da regra do produto para a diferenciação. Leve o que eu digo em consideração. A idéia básica da integração por partes é transformar uma integral que você *não pode* fazer em um simples produto menos a integral que você *pode* fazer. Aqui está a fórmula:

Integração por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Não tente entender isso agora. Espere pelos exemplos a seguir.

Note que u e v estão em ordem alfabética em $\int u\,dv$ e uv. Se você lembrar disso, você pode facilmente lembrar que a integral a direita é justamente igual à integral da esquerda, exceto com o u e v ao inverso.

Aqui está o método em poucas palavras. O que é $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$? Primeiramente, você tem que separar o integrando em um u e um dv para que se enquadre na fórmula. Para esse problema, escolha $\ln(x)$ para ser

seu ***u***. Assim todo o resto é o ***dv***, a saber, $\sqrt{x}\ dx$ (Eu mostro a você como escolher o ***u*** no próximo tópico – é muito fácil). Depois, você diferencia ***u*** para obter o seu ***Du***, e você integra o ***dv*** para obter o seu ***v***. Por fim, você insere tudo na fórmula e você terminou o problema.

Para ajudar tudo a ficar certinho, organize os problemas envolvendo a integração por partes com um quadrado como a da Figura 15-1. Desenhe um quadrado 2 por 2 vazio, depois coloque o seu ***u***, ln(x), no canto superior esquerdo, e o seu ***dv***, $\sqrt{x}\ dx$, no canto inferior direito. Veja a Figura 15-2.

Figura 15-1: A integração por partes em um quadrado.

Figura 15-2: Preenchendo o quadrado.

As setas na Figura 15-2 lembram a você de diferenciar à esquerda e a integrar à direita. Pense na diferenciação – a coisa mais fácil – como indo para baixo (como descendo uma colina), e a integração – a coisa mais difícil – como indo para cima (como subindo uma colina).

Agora complete o quadrado:

$$u = \ln(x) \qquad dv = \sqrt{x}\ dx$$

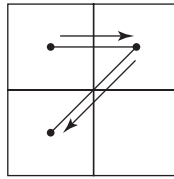
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int \sqrt{x}\ dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{2}{3}x^{3/2} \text{ (regra inversa da potência)}$$

A Figura 15-3 mostra o quadrado completo.

Uma boa maneira de lembrar a fórmula da integração por partes é começar do quadrado superior esquerdo e desenhar um número 7 imaginário – através, depois para baixo à esquerda. Veja a Figura 15-4.

Figura 15-3: O quadrado completo para $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.

Figura 15-4: Um quadrado com um 7 nele. Quem disse que o cálculo é um bicho-de-sete-cabeças?

Para lembrar como você desenha o 7, olhe de volta para a Figura 15-3. A fórmula da integração por partes diz para você fazer a parte de cima do número 7, a saber, $\ln(x) \cdot \frac{2}{3}x^{3/2}$ menos a integral da parte diagonal do número 7, $\int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}dx$. A propósito, isso é ***muito*** mais fácil de fazer do que de explicar. Tente. Você vai ver como esse esquema lhe ajuda a aprender a fórmula e a organizar esses problemas.

Pronto para terminar? Insira tudo na fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx &= \ln(x) \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} - \int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2} \cdot dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) \text{(regra inversa da potência)} \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - \frac{2}{3}C \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + C\end{aligned}$$

No último passo, você substitui o $-\frac{2}{3}C$ pelo C porque $-\frac{2}{3}$ vezes qualquer número continua sendo qualquer número.

Escolhendo o seu u

Aqui está um ótimo mnemônico para como escolher o ***u*** (de novo, uma vez selecionado o ***u***, tudo o mais é automaticamente o ***dv***).

Herbert E. Kasube propôs o anagrama *LIATE* para ajudar você a escolher o ***u*** (nerds do cálculo podem dar uma olhada no artigo de Herb na *American Mathematical Monthly* 90, edição de 1983):

L	Logarítmicas	(como log(x))
I	Inversas de trigonométricas	(como *arc*tan(x))
A	Algébricas	(como $5x^2 + 3$)
T	Trigonométricas	(como cos(x))
E	Exponenciais	(como 10^x)

Para escolher o seu ***u***, siga essa lista na ordem; o primeiro tipo de função nessa lista que aparece no integrando é o ***u***.

Aqui estão algumas dicas úteis para lembrar o anagrama *LIATE*. O que você acha de Lulu Ignorava Amar Tiago Eternamente? Ou talvez você prefira Lilliputs Indianos Armavam Trair Eduardo, ou Lúcia Idealizava A Tropa Estelar. Essa última não é muito boa porque também pode ser A Tropa Estelar Idealizava Lúcia. Por Deus! O que eu fiz? Agora você nunca vai se lembrar!

Bem, o que você acha de tentar um exemplo? Integre $\int arc\tan(x)dx$. Note que algumas vezes a integração por partes funciona para integrandos como esses que contém apenas uma única função.

1. **Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.**

   Você pode ver que não há funções logarítmicas no *arc*tan(x)dx, mas há uma função trigonométrica inversa, *arc*tg(x)dx. Então esse é o seu u. Todo o resto é o seu dv, a saber, o simples dx.

2. **Faça o esquema do quadrado.**

Veja a Figura 15-5.

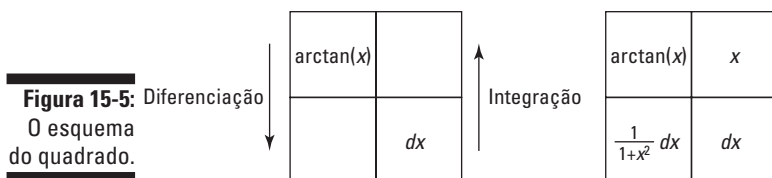



Figura 15-5: O esquema do quadrado.

3. **Insira tudo na fórmula da integração por partes ou apenas desenhe o número 7 imaginário no quadrado da direita na Figura 15-5.**

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int arc\tan(x)dx = x\, arc\tan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

   Agora você pode terminar o problema integrando $\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ com o método da substituição, definindo $u = 1 + x^2$. Tente (veja o Capítulo 14 para mais sobre o método da substituição). Note que o u em $u = 1 +$

x^2 não tem nada a ver com a integração por partes de u. Sua resposta final deve ser $\int arc\tan(x)dx = x\, arc\tan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

Aqui está outro problema. Integre $\int x\text{sen}(3x)dx$.

1. Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.

Seguindo a lista *LIATE*, o primeiro tipo de função que você encontra em $x\text{sen}(3x)dx$ é uma função algébrica muito simples, a saber, x, então esse é o seu u.

2. Faça o esquema do quadrado.

Veja a Figura 15-6.

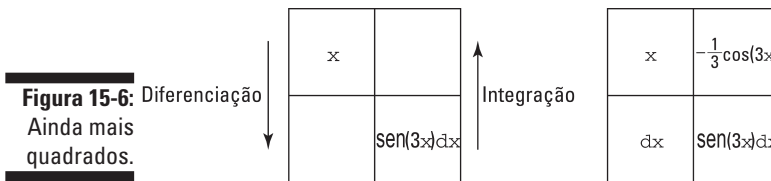



Figura 15-6: Ainda mais quadrados.

Diferenciação

x	
	sen(3x)dx

Integração

x	$-\frac{1}{3}\cos(3x)$
dx	sen(3x)dx

3. Insira tudo na fórmula da integração por partes ou apenas desenhe o número 7 imaginário no quadrado da direita na Figura 15-6.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x sen(3x)dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx$$

Você pode integrar facilmente $\int \cos(3x)\,dx$ com o método da substituição ou da adivinhação e da verificação. Faça. Sua resposta final deve ser $-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\text{sen}(3x) + C$.

Integração por partes: segunda vez, igual à primeira

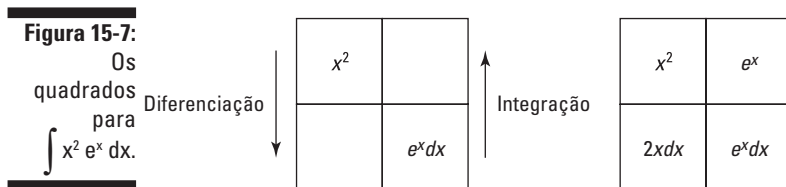
De vez em quando você tem que usar o método da integração por partes mais de uma vez porque a primeira vez apenas o leva a apenas um pedaço da resposta. Aqui está um exemplo. Encontre $\int x^2 e^x\,dx$.

1. Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.

$x^2 e^x\,dx$ contém uma função algébrica, x^2, e uma função exponencial, e^x (é uma função *exponencial* porque há um x no expoente). O primeiro na lista *LIATE* é x^2, então esse é o seu u.

2. **Faça o esquema do quadrado.**

   Veja a Figura 15-7.

Figura 15-7: Os quadrados para $\int x^2 e^x dx$.

3. **Use a fórmula da integração por partes – ou o mnemônico "7".**

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2xdx$$
$$= x^2 e^x - 2\int xe^x xdx$$

   Você acaba ficando com outra integral, $\int xe^x dx$, que não pode ser feita por nenhum dos métodos simples – regras inversas, adivinhar e verificar, e substituição. Mas note que a potência x foi reduzida em um, então você progrediu. Se você usar a integração por partes de novo para $\int xe^x dx$, o x vai desaparecer por completo e você vai ter terminado.

4. **Integre por partes de novo.**

   Eu vou dizer para você fazer isso sozinho.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

5. **Pegue o resultado do passo 4 e o substitua pelo da resposta do passo 3 para produzir todo o problema.**

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C)$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Andando em círculos

Às vezes se você usar a integração por partes duas vezes, você voltará para onde começou – que, ao contrário de se perder, *não* é uma perda de tempo. Integre $\int e^x \cos(x)\, dx$ e entenda.

Seu u é $\cos(x)$ (é o T em *LIATE*), e $e^x\, dx$ é o seu dv. Agora avance rapidamente para o passo da fórmula:

$$\int e^x (\cos x)dx = e^x \cos(x) - \int e^x \left(-\text{sen}(x)\right) dx$$
$$= e^x \cos(x) + \int e^x\, \text{sen}(x)\, dx$$

Integrando por partes $\int e^x\, \text{sen}(x)\, dx$ de novo, você tem

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

E você está de volta onde começou: $\int e^x \cos(x)\, dx$. Não se preocupe. Primeiramente, substitua o lado direito da equação acima por $\int e^x \sin(x)\, dx$ da solução original:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

Você pode agora resolver essa equação para a integral $\int e^x \cos(x)\, dx$. Use I no lugar dessa integral para fazer essa equação confusa ficar mais fácil aos olhos:

$$I = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - I$$

Some I a ambos os lados:

$$2I = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)$$

Multiplique os dois lados por ½:

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen}(x)$$

Finalmente, coloque o $\int e^x \cos(x)\, dx$ de volta no lugar de I, e não se esqueça do C:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen}(x) + C$$

Integrais Trigonométricas Complicadas

Nesse tópico, você integra potências das seis funções trigonométricas, como $\int \operatorname{sen}^3(x)\, dx$ e $\int \sec^4(x)\, dx$, e produtos ou quocientes de diferentes funções trigonométricas, como $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^3(x)\, dx$ e $\int \frac{\operatorname{cosec}^2(x)}{\operatorname{cotg}(x)}\, dx$. Isso é muito entediante – é hora de pedir um expresso duplo.

Para usar as técnicas a seguir, você deve ter um integrando que contenha apenas uma das seis funções trigonométricas como $\int \operatorname{cosec}^3(x)\, dx$ ou um determinado parde funções trigonométricas como $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)\, dx$. Se o integrando tiver duas funções trigonométricas, as duas devem ser uma desses três pares: seno com cosseno, secante com tangente, ou cossecante com cotangente. Se você tiver um integrando contendo algo diferente desses

três pares, você pode facilmente converter o problema em um desses pares usando as identidades trigonométricas como $\text{sen}(x) = \dfrac{1}{\text{cosec}\,(x)}$ e $\text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}\,(x)}{\cos\,(x)}$ (veja a folha de consulta para mais identidades trigonométricas úteis). Por exemplo,

$$\begin{aligned}&\int \text{sen}^2(x)\,\sec(x)\text{tg}(x)dx\\ =&\int \text{sen}^2(x)\,\frac{1}{\cos\,(x)}\cdot\frac{\text{sen}\,(x)}{\cos\,(x)}\,dx\\ =&\int \frac{\text{sen}^3\,(x)}{\cos^2\,(x)}\,dx\end{aligned}$$

Depois de fazer qualquer conversão necessária, você obtém um dos três casos a seguir:

$$\int \text{sen}^m(x)\,\cos^n(x)\,dx$$

$$\int \sec^m(x)\,\text{tg}^n(x)\,dx$$

$$\int \text{cosec}^m(x)\,\text{cotg}^n(x)\,dx$$

onde m ou n é um inteiro positivo.

Potências positivas de funções trigonométricas são, via de regra, mais desejáveis do que potências negativas, então, por exemplo, você quer converter $\int \text{sen}^{-2}(x)\,\text{tg}^{-2}(x)\,dx$ em $\int \text{cosec}^2(x)\,\text{cotg}^2(x)\,dx$.

A idéia básica com a maioria das integrais trigonométricas a seguir é organizar o integrando para que você possa fazer uma útil substituição em u e então integrar com a regra inversa da potência. Você vai ver o que eu quero dizer em um minuto.

A propósito, apesar de a lista de casos a seguir ser cansativa, ela não é completa. A meu ver, passar por todas as possibilidades seria tanto cruel quanto masoquista. Se seu professor lhe der integrais não abordadas pelos casos a seguir, boa sorte!

Integrais contendo senos e cossenos

Esse tópico cobre as integrais contendo – você consegue adivinhar? – senos e cossenos.

Caso 1: A potência do seno é ímpar e positiva

Se a potência do seno for ímpar e positiva, remova um fator seno e coloque na frente do resto da expressão, transforme os fatores seno restantes (pares) em cossenos com a identidade Pitagoreana, e depois integre com o método da substituição onde $u = \cos(x)$.

LEMBRE-SE

A *identidade Pitagoreana* diz que, para qualquer ângulo x, $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. E assim $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$.

Agora integre $\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$.

1. **Remova um fator seno e mova para a direita.**

$$\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = \int \text{sen}^2(x)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx$$

2. **Transforme os senos restantes (pares) em cossenos usando a identidade Pitagoreana e simplifique.**

$$\begin{aligned}&\int \text{sen}^2(x)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx\\ &= \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx\\ &= \int \left(\cos^4(x) - \cos^6\right)\text{sen}(x)dx\end{aligned}$$

3. **Integre com a substituição, onde $u = \cos(x)$.**

$$\begin{aligned}u &= \cos(x)\\ \frac{du}{dx} &= -\text{sen}(x)\\ du &= -\text{sen}(x)dx\end{aligned}$$

Você pode economizar um pouco de tempo em todos os problemas envolvendo substituição apenas resolvendo em função de du – como eu fiz logo acima – e não se preocupar em resolver em função de dx. Você então ajusta a integral para que ela contenha o du igual a $(-\text{sen}(x)dx)$ nesse problema. A integral contém um $(\text{sen}(x)dx)$, então você o multiplica por -1 para transformá-lo em $-\text{sen}(x)dx$ e depois recompensa esse -1 multiplicando toda a integral por -1. Isso é simples porque -1 vezes -1 é igual a 1. Isso talvez soe um tanto quanto um atalho, mas poupa tempo uma vez que você se acostuma a ele.

Então, ajuste a sua integral:

$$\begin{aligned}&\int \left(\cos^4(x) - \cos^6(x)\right)\left(\text{sen}(x)dx\right)\\ &= -\int \left(\cos^4(x) - \cos^6(x)\right)\left(-\text{sen}(x)dx\right)\end{aligned}$$

Agora substitua e resolva usando a regra inversa da potência:

$$\begin{aligned}&-\int (u^4 - u^6)du\\ &= -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C\\ &= \frac{1}{7}\cos^7(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + C\end{aligned}$$

Caso 2: A potência do cosseno é ímpar e positiva

Esse problema funciona exatamente como o Caso 1, exceto que as funções do seno e cosseno são invertidas. Encontre $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}}\,dx$.

1. **Remova um fator cosseno e mova para a direita.**

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}}\,dx = \int \cos^3(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)dx$$
$$= \int \cos^2(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)dx$$

2. **Transforme os senos restantes (pares) em cossenos usando a identidade Pitagoreana e simplifique.**

$$\int \cos^2(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)dx$$
$$= \int \left(1-\text{sen}^2(x)\right)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)dx$$
$$= \int \left(\text{sen}^{-1/2}(x)-\text{sen}^{3/2}(x)\right)\cos(x)dx$$

3. **Integre com a substituição, onde $u = \text{sen}(x)$.**

$$u = \text{sen}(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \cos(x)$$
$$du = \cos(x)dx$$

Agora substitua:

$$= \int \left(u^{-1/2} - u^{3/2}\right)du$$

E termine a integração como no Caso 1.

Caso 3: As potências do seno e do cosseno são pares e não negativas

Aqui você transforma o integrando em potências ímpares dos cossenos usando as identidades trigonométricas a seguir:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \text{ e } \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Depois você termina o problema como no Caso 2. Aqui está um exemplo:

$$\int \text{sen}^4(x)\cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(\text{sen}^2(x)\right)^2 \cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(2x)-\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right)dx \text{ (É apenas álgebra!)}$$
$$= \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int \cos(2x)dx - \frac{1}{8}\int \cos^2(2x)dx + \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)dx$$

O primeiro nessa seqüência de integrais é óbvio; o segundo é uma regra inversa simples com um pequeno ajuste para o 2; você faz a terceira integral usando a identidade $\cos^2(x)$ uma segunda vez; e a quarta integral é feita seguindo os passos no Caso 2. Faça isso. Sua resposta final deve ser

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\text{sen}(4x) - \frac{1}{48}\text{sen}^3(2x) + C$$

Um verdadeiro passeio.

Integrais contendo secantes e tangentes

Pronto para um choque? Esse tópico é sobre integrais contendo secantes e tangentes.

Caso 1: A potência da tangente é ímpar e positiva

Integre $\int \sqrt{\sec(x)}\ \text{tg}^3(x)dx$

1. **Remova um fator secante-tangente e mova para a direita.**

   Primeiramente, reescreva o problema: $\int \sqrt{\sec(x)}\ \text{tg}^3(x)dx = \int \sec^{1/2}(x)\ \text{tg}^3(x)dx$.

   Agora, tirar o fator secante-tangente de $\sec^{1/2}(x)\tan^3(x)$ pode parecer como tentar tirar leite das pedras porque $\sec^{1/2}(x)$ tem uma potência menor do que $\sec^1(x)$, mas funciona:

   $$\int \sec^{1/2}(x)\text{tg}^3(x)dx = \int \left(\sec^{-1/2}(x)\text{tg}^2(x)\right)\sec(x)\text{tg}(x)dx$$

2. **Transforme as tangentes restantes (pares) em secantes usando a versão da tangente-secante da identidade Pitagoreana.**

   Uma maneira fácil de lembrar a versão tangente-secante da identidade Pitagoreana é começar com a versão seno-cosseno, $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, e dividir ambos os lados dessa equação por $\cos^2(x)$. Isso produz $\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$. Para produzir a versão cotangente-cossecante, divida ambos os lados de $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ por $\text{sen}^2(x)$. O resultado é $1 + \text{cotg}^2(x) = \text{cosec}^2(x)$.

   A identidade Pitagoreana é $\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$, e assim $\text{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$. Agora faça a troca.

   $$\int \left(\sec^{-1/2}(x)\text{tg}^2(x)\right)\sec(x)\text{tg}(x)dx$$
   $$= \int \left(\sec^{-1/2}(x)\ (\sec^2(x) - 1\right)\ \sec(x)\ \text{tg}(x)dx$$
   $$= \int \left(\sec^{3/2}(x) - \sec^{-1/2}(x)\right)\sec(x)\text{tg}(x)dx$$

3. Resolva pela substituição com $u = \sec(x)$ e $du = \sec(x)\text{tg}(x)dx$.

$$= \int \left(u^{3/2} - u^{-1/2}\right)du$$
$$= \frac{2}{5}u^{5/2} - 2u^{1/2} + C$$
$$= \frac{2}{5}\sec^{5/2} - 2\sec^{1/2}(\text{x}) + C$$

Caso 2: A potência da secante é par e positiva

Encontre $\int \sec^4(x)\text{tg}^4(x)\,\text{dx}$.

1. Remova um fator $\sec^4(x)$ e mova para a direita.

$$= \int \sec^2(x)\text{tg}^4(x)\sec^2(x)dx$$

2. Transforme as secantes restantes em tangentes usando a identidade Pitagoreana, $\sec^2(x) = \text{tg}^2(x) + 1$.

$$= \int \left(\text{tg}^2(x) + 1\right)\text{tg}^4(x)\sec^2(x)dx$$
$$= \int \left(\text{tg}^6(x) + \text{tg}^4(x)\right)\sec^2(x)dx$$

3. Resolva pela substituição, onde $u = \text{tg}(x)$ e $du = \sec^2(x)dx$.

$$= \int \left(u^6 - u^4\right)du$$
$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{7}\text{tg}^7(x) + \frac{1}{5}\text{tg}^5(x) + C$$

Caso 3: A potência da tangente é par e positiva e não há fatores com secante

Integre $\int \text{tg}^6(\text{x})\,dx$.

1. Transforme um fator $\text{tg}^2(x)$ em secantes usando a identidade Pitagoreana, $\text{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$.

$$= \int \text{tg}^4(x)(\sec^2(x) - 1)dx$$

2. Distribua e separe a integral.

$$= \int \text{tg}^4(x)\sec^2(x)\,dx - \int \text{tg}^4(x)dx$$

3. Resolva a primeira integral como no passo 3 do Caso 2 para secantes e tangentes.

Você deve obter $\int \text{tg}^4(x)\sec^2(x)\,dx = \frac{1}{5}\text{tg}^5(x) + C$.

4. Para a segunda integral do passo 2, volte para o passo 1 e repita o processo.

Para esse pedaço do problema, você obtém

$$-\int \text{tg}^4(x)dx = -\int \text{tg}^2(x)\sec^2(x)dx + \int \text{tg}^2(x)dx$$

5. Repita o passo 3 para $-\int \text{tg}^2(x)\sec^2(x)dx$ (usando o Caso 2 (passo 3) para secantes e tangentes de novo).

$$-\int \text{tg}^2(x)\sec^2(x)dx = -\frac{1}{3}\ \text{tg}^3(x) + C$$

6. Use a identidade Pitagoreana para transformar a $\int \text{tg}^2(x)dx$ do passo 4 em $\int \sec^2(x)dx - \int 1dx$.

Ambas as integrais podem ser feitas com regras inversas simples da diferenciação. Depois de coletar todos esses pedaços – pedaço 1 do passo 3, pedaço 2 do passo 5, e pedaços 3 e 4 do passo 6 – sua resposta final deve ser $\int \text{tg}^6(x)dx = \frac{1}{5}\ \text{tg}^5(x) - \frac{1}{3}\text{tg}^3(x) + \text{tg}(x) - x + C$.

Muito fácil.

Integrais contendo cossecantes e cotangentes

Integrais com cossecante e cotangente funcionam exatamente como os três casos pra secantes e tangentes – você apenas usa uma forma diferente da identidade Pitagoreana: $1 + \text{cotg}^2(x) = \csc^2(x)$. Tente essa aqui – integre $\int \frac{\text{cotg}^3(x)}{\sqrt{\text{cosec}(x)}}d\,x$. Se você obtiver $-2\text{sen}^{1/2}(x) - \frac{2}{3}$ $\text{cosec}^{3/2}(\text{x}) + C$, siga em frente e retire o prêmio de $200.

Se você tiver um problema secante-tangente ou cossecante-cotangente que não se enquadra em nenhum dos casos discutidos no tópico anterior ou se estiver confuso com o problema, tente transformá-lo em senos e cossenos e resolva com um dos métodos seno-cosseno ou com identidades do tipo $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$. Por exemplo, $\int \frac{\text{tg}^4(x)}{\sec^2(x)}\,dx$ não se enquadra em nenhum dos casos discutidos, mas você pode transformá-la em $\int \frac{\text{sen}^4(x)}{\cos^2(x)}dx$. Essa não se enquadra em nenhum dos três casos seno-cosseno, mas você pode usar a identidade Pitagoreana para transformá-la em $\int \frac{\left(1-\cos^2(x)\right)^2}{\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)}{\cos^2(x)}dx$. Isso se separa em $\int \sec^2(x)dx - \int 2dx + \int \cos^2(x)$ dx, e o resto é fácil. Tente. E veja se você pode diferenciar seu resultado e chegar de volta ao problema original.

Você também pode fazer muitos problemas básicos de secante-tangente ou cossecante-cotangente convertendo-os em problemas seno-cosseno – em vez de fazê-los da maneira que eu descrevi aqui e no tópico anterior.

Seu Pior Pesadelo: Substituição Trigonométrica

Com o método da substituição trigonométrica, você pode fazer integral contendo radicais da seguinte forma: $\sqrt{u^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, e $\sqrt{u^2 - a^2}$ (assim como as potências dessas raízes), onde ***a*** é uma constante e ***u*** é uma expressão contendo x. Por exemplo, $\sqrt{3^2 - x^2}$ está na forma $\sqrt{a^2 - u^3}$.

Você vai amar essa técnica... mais ou menos tanto quanto enfiar um ferro no seu olho.

Considere puxar o alarme de incêndio no dia que o seu professor estiver apresentando esse tópico. Com alguma sorte, seu professor vai concluir que não pode ficar atrasado no cronograma e vai apenas omitir esse tópico da sua prova final. Antes de mostrar como a substituição trigonométrica funciona, eu tenho alguns truques mnemônicos bobos para ajudar você a manter os três casos desse método corretos. Lembrar-se com os artifícios mnemônicos, de coisas bobas (e vulgares) funciona. Primeiramente, os três casos envolvem três funções trigonométricas, *tangente*, *seno* e *secante*. Suas letras iniciais, *t*, *s*, e *s*, são as mesmas letras que as letras iniciais do nome dessa técnica, *substituição trigonométrica*. Legal, né?

A Tabela 15-1 mostra como essas três funções trigonométricas se organizam com as formas radicais listadas no primeiro parágrafo.

Tabela 15-1 Uma Tabela Totalmente Radical

$\text{tg}(\theta) \longleftrightarrow$	$\sqrt{u^2 + a^2}$
$\text{sen}(\theta) \longleftrightarrow$	$\sqrt{a^2 - u^2}$
$\sec(\theta) \longleftrightarrow$	$\sqrt{u^2 - a^2}$

Para manter esses pares corretos, note que o sinal de mais em $\sqrt{u^2 + a^2}$ parece um pequeno *t* para *tangente*, e que as outras duas formas, $\sqrt{a^2 - u^2}$ e $\sqrt{u^2 - a^2}$, contêm um sinal de *subtração* – s é para *seno* e *secante*. Para decorar com o que o *seno* e a *secante* combinam, note que $\sqrt{a^2 - u^2}$ começa com a letra *a*, e é uma sina ser torcedor do América. Ok. Eu admito que essa foi muito ruim. Se você elaborar um mnemônico melhor, use-o!

Pronto para fazer alguns problemas? Eu já protelei o bastante.

Caso 1: Tangentes

Encontre $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$. Primeiro, note que isso pode ser escrito como $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x)^2+2^2}}$, então se enquadra na forma $\sqrt{u^2+a^2}$, onde $u = 3x$ e $a = 2$.

1. **Desenhe um triângulo retângulo – basicamente um triângulo *SohCahToa* – onde tg (θ) é igual a $\frac{u}{a}$, que é $\frac{3x}{2}$.**

   Visto que você sabe que tg(θ)= $\frac{O}{A}$ (proveniente do *SohCahToa* – veja o Capítulo 6), seu triângulo deve ter $3x$ como O, o lado *oposto* ao ângulo θ, e 2 como A, o lado *adjacente*. O comprimento da hipotenusa é automaticamente igual ao seu radical, $\sqrt{(3x)^2+2^2}$, ou $\sqrt{9x^2+4}$. Não é uma má idéia confirmar isso com o teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Veja a Figura 15-8.

2. **Resolva a tg (θ) $\frac{3x}{2}$ em função de x, diferencie, e ache o valor de dx.**

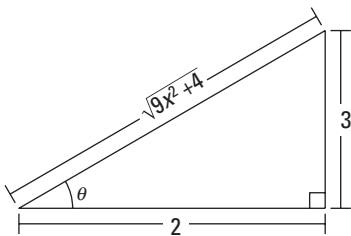
$$\frac{3x}{2} = \text{tg}(\theta)$$

$$3x = 2\text{tg}(\theta)$$

$$x = \frac{2}{3}\,\text{tg}(\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{3}\sec^2(\theta)$$

$$dx = \frac{2}{3}\sec^2(\theta)\,d\theta$$

Figura 15-8: Um triângulo SohCahToa para o caso de $\sqrt{u^2 + a^2}$. Seja como for, que mente sinistra sonhou com essa técnica de integração?

3. Encontre qual função trigonométrica é representada pelo radical sobre o *a*, e depois ache o valor do radical.

Olhe para o triângulo na Figura 15-8. O radical é a *hipotenusa* e o *a* é 2, o lado *adjacente*, então $\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2}$ é $\frac{H}{A}$, que é igual à secante. Então $\sec(\theta) = \sqrt{9x^2+4} = 2\sec(\theta)$.

4. Use os resultados dos passos 2 e 3 para fazer substituições no problema original e depois integre.

Dos passos 2 e 3 você tem $dx = \frac{2}{3}\sec^2(\theta)d\theta$ e $\sqrt{9x^2+4} = 2\sec(\theta)$. Agora você pode finalmente fazer a integração.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2(\theta)d\theta}{2\sec^2(\theta)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\text{In}\left|\sec(\theta)+\text{tg}(\theta)\right|+C$$

(da fácil e elegante tabela de integrais na folha de consulta)

5. Substitua de volta as expressões contendo x dos passos 1 e 3 pela sec(θ) e tg(θ). Você também pode obter a expressão a partir do triângulo na Figura 15-8.

$$= \frac{1}{3}\text{In}\left|\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2}+\frac{3x}{2}\right|+C$$

$$= \frac{1}{3}\text{In}\left|\frac{\sqrt{9x^2+4}+3x}{2}\right|+C$$

$$= \frac{1}{3}\text{In}\left|\sqrt{9x^2+4}+3x\right|-\frac{1}{3}\text{In}2+C$$

(pelo log da regra do quociente, é claro, e distribuindo $\frac{1}{3}$)

$$= \frac{1}{3}\text{In}\left|\sqrt{9x^2+4}+3x\right|+C$$

(porque $-\frac{1}{3}\text{In}2+C$ é apenas uma constante)

Agora me diga, quando foi a última vez que você se divertiu tanto? Antes de lidar com o caso 2, aqui estão algumas dicas.

Para todos os três casos na substituição trigonométrica, o passo 1 sempre envolve desenhar um triângulo no qual a função trigonométrica em questão seja igual a $\frac{u}{a}$:

No caso 1 é $\text{tg}(\theta) = \frac{u}{a}$.

No caso 2 é sen(θ) = $\frac{u}{a}$.

No caso 3 é tg(θ) = $\frac{u}{a}$.

O fato do u ficar no numerador dessa fração $\frac{u}{a}$ deve ser fácil de lembrar porque u é uma expressão com x e algo do tipo $\frac{3x}{2}$ é de certa forma mais simples e natural de se ver do que $\frac{2}{3x}$. Então apenas lembre que o x fica na parte superior.

Para todos os três casos, o passo 3 sempre envolve colocar o radical sobre o a. Os três casos são dados abaixo, mas você não precisa decorar as funções trigonométricas nessa lista porque você vai saber qual delas você tem apenas olhando para o triângulo – supondo que você saiba *SohCahToa* e as funções trigonométricas recíprocas (volte para o Capítulo 6 se você não souber). Eu deixei de fora o que vai dentro do radical porque na hora que você estiver fazendo o passo 3, você já vai ter a expressão do radical correta.

No caso 1 é sec(θ) $\frac{\sqrt{}}{a}$.

No caso 2 é cos(θ) $\frac{\sqrt{}}{a}$.

No caso 3 é tg(θ) $\frac{\sqrt{}}{a}$.

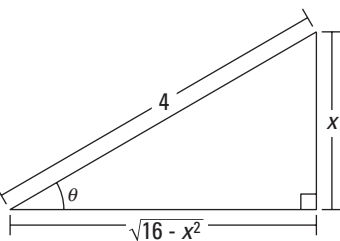
Resumindo, apenas lembre-se de $\frac{u}{a}$ para o passo 1 e $\frac{\sqrt{}}{a}$ para o passo 3.

Caso 2: Senos

Integre $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$, reescrevendo primeiro como $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}$ para que se enquadre na forma $\sqrt{a^2-u^2}$, onde a = 4 e u = x.

1. Desenhe um triângulo retângulo onde sen(θ) = $\frac{u}{a}$, que é $\frac{x}{4}$.

Seno é igual a $\frac{\text{O}}{\text{H}}$, então o lado *oposto* é x e a *hipotenusa* é 4. O comprimento do lado adjacente é então automaticamente igual ao seu radical, $\sqrt{16-x^2}$. Você deve confirmar isso com o teorema de Pitágoras. Veja a Figura 15-9.

Figura 15-9: Um triângulo SohCahToa para o caso de $\sqrt{a^2 - u^2}$.

2. Resolva a sen(θ) = $\frac{x}{4}$ em função de x, diferencie, e ache o valor de dx.

$$\frac{x}{4} = \text{sen}(\theta)$$
$$x = 4\text{sen}(\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = 4\cos(\theta)$$
$$dx = 4\cos(\theta)d\theta$$

3. Encontre qual função trigonométrica é igual ao radical sobre o *a*, e depois ache o valor do radical.

Olhe para o triângulo da Figura 15-9. O radical $\sqrt{16 - x^2}$, sobre o a, 4, é $\frac{\text{A}}{\text{H}}$, que, você conhece do *SohCahToa*, é igual ao *cosseno*. Então isso lhe dá

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}, \text{ e assim}$$

$$\sqrt{16 - x^2} = 4\cos(\theta)$$

4. Use os resultados dos passos 2 e 3 para fazer substituições no problema original e depois integre.

Note que nesse problema em particular você tem que fazer três substituições, não apenas duas como no primeiro exemplo. Dos passos 2 e 3 você tem

$x = 4\text{sen}(\theta)$, $dx = 4\cos(\theta)d\theta$, e $\sqrt{16 - x^2} = 4\cos(\theta)$, então

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{4\cos(\theta)d\theta}{(4\,\text{sen}(\theta))^2\, 4\cos(\theta)}$$
$$= \int \frac{d\theta}{16\,\text{sen}^2(\theta)}$$
$$= \frac{1}{16}\int \text{cosec}^2(\theta)d\theta$$
$$= -\frac{1}{16}\text{cotg}(\theta) + C$$

5. O triângulo mostra que cotg(θ) $\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$. Agora, substitua de volta para a sua resposta final.

$$= -\frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + C$$
$$= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{16x} + C$$

É muito fácil.

Caso 3: Secantes

Tendo em vista o tempo – e a sensatez – eu vou pular esse caso. Você não vai ter nenhum problema com esse caso porque a esta altura você já está *perito* nos casos 1 e 2, e todos os passos para o caso 3 são basicamente os mesmos.

Tente essa aqui. Integre $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx$. Eu vou começar para você. No passo1, você desenha um triângulo, onde sec $(\theta) = \frac{u}{a}$, isto é $\frac{x}{3}$. Agora continue daqui. Aqui está a resposta (não vale olhar se você ainda não tiver terminado): $\sqrt{x^2 - 9} - 3\, arc\text{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\right) + C$.

Os As, Bs, e Cxs das Frações Parciais

Logo quando você pensou que não podia ficar pior do que as subs-tituições trigonométricas, eu apareço com a técnica das frações parciais.

Você usa o método das frações parciais para integrar funções racionais do tipo $\frac{6x^2 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2}$. A idéia básica é desfazer o resultado da soma de uma fração: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; para que você divida $\frac{5}{6}$ em $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$. Você começa com uma fração do tipo $\frac{17}{20}$ e a divide em uma soma de frações, $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$, só que você está lidando com funções racionais complicadas e não frações numéricas simples.

Antes de usar a técnica das frações parciais, você tem que verificar que o seu integrando é uma fração "própria" – isto é, uma onde o grau do numerador seja menor que o grau do denominador. Se o integrando for "impróprio", como em $\int \frac{2x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x - 2}\, dx$, você tem que primeiro fazer a divisão polinomial longa para transformar a fração imprópria em uma soma de um polinômio (o que, às vezes, vai ser apenas um número) e uma fração própria. Aqui está a divisão para essa fração imprópria (sem explicação). Basicamente, funciona como uma divisão longa regular.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \\ x^3 - 3x - 2 & \overline{2x^3 + x^2 + 0x - 10} \\ & 2x^3 \quad\quad - 6x - 4 \\ & \overline{\quad\quad x^2 + 6x - 6} \end{array}$$

Com a divisão regular, se você dividir 23 por 4, você obterá um quociente igual a 5 e um resto de 3, que te diz que $\frac{23}{4}$ é igual a 5 + $\frac{3}{4}$, ou $5\frac{3}{4}$. O resultado da divisão polinomial acima diz a você a mesma coisa. O quociente é igual a 2 e o resto é igual a $x^2 + 6x - 6$, assim $\frac{2x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x - 2}$ é igual a $2 + \frac{x^2 + 6x - 10}{x^3 - 3x - 2}$. O problema original, $\int \frac{2x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x - 2}\,dx$, se torna então $\int 2dx + \int \frac{x^2 + 6x - 6}{x^3 - 3x - 2}\,dx$. A primeira integral é simplesmente $2x$. Você vai então fazer a integral segunda com o método da fração parcial. Aqui está como funciona. Primeiro um exemplo básico e depois um mais avançado.

Caso 1: O denominador contém apenas funções lineares

Integre $\int \frac{5}{x^2 + x - 6}\,dx$. Esse é um problema do caso 1 porque o denominador fatorado (veja o passo 1) contém apenas fatores *lineares* – em outras palavras, polinômios de *primeiro* grau.

1. **Fatore o denominador.**

$$\frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{5}{(x-2)\,(x+3)}$$

2. **Divida as frações da direita em uma soma de frações, onde cada fator do denominador no passo 1 se torne o denominador de uma fração separada. Depois coloque incógnitas no numerador de cada fração.**

$$\frac{5}{(x-2)\,(x+3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

3. **Multiplique ambos os lados dessa equação pelo denominador do lado esquerdo.**

   Isso é álgebra I, então você não espera que eu vá mostrar os passos. Certo?

$$5 = \mathrm{A}(x+3) + \mathrm{B}(x-2)$$

4. **Tire as raízes dos fatores lineares e os insira – um de cada vez – em *x* na equação do passo 3, e ache os valores das incógnitas.**

Se $x = 2$	Se $x = -3$
$5 = A(2+3) + B(2-2)$	$5 = A(-3+3) + B(-3-2)$
$5 = 5A$	$5 = -5B$
$A = 1$	$B = -1$

5. **Coloque esses resultados em *A* e *B* na equação do passo 2.**

$$\frac{5}{(x-2)\,(x+3)} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+3)}$$

6. **Separe a integral original nas frações parciais do passo 5 e você está dispensado.**

$$\int \frac{5}{x^2 + x - 6}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-1}{x+3}\,dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C \qquad \text{(o log de uma regra do quociente)}$$

Caso 2: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis

Às vezes você não pode fatorar um denominador até chegar aos fatores lineares porque alguns quadrados são irredutíveis – como números primos, eles não podem ser divididos. Você pode facilmente verificar se um quadrado ($ax^2 + bx + c$) é redutível ou não verificando seu delta, $b^2 - 4ac$. Se o delta for negativo, o quadrado é irredutível. Usando a técnica das frações parciais com quadrados irredutíveis é um pouco diferente.

Aqui está um problema: Integre $\int \frac{5x^3 + 9x - 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx$.

1. **Fatore o denominador.**
   Já está feito! Não diga que nunca fiz nada por você.

2. **Divida a fração em uma soma de "frações parciais".**
   Se você tiver um fator quadrado irredutível (como o $x^2 + 4$), o numerador para essa fração parcial precisa de duas incógnitas na forma $Ax + B$.

$$\frac{5x^3 + 9x - 4}{x(x-1)\,(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4}$$

3. **Multiplique ambos os lados dessa equação pelo lado esquerdo do denominador.**

$$5x^3 + 9x - 4 = A\,(x-1)(x^2+4) + B\,(x)(x^2+4) + (Cx + D)(x)\,(x-1)$$

4. **Tire as raízes dos fatores lineares e coloque-os – um de cada vez – no lugar de *x* na equação do passo 3, e depois resolva.**

Se $x = 0$	Se $x = 1$,
$-4 = -4A$	$10 = 5B$
$A = 1$	$B = 2$

   Ao contrário do exemplo do caso 1, você não pode achar todos os valores das incógnitas inserindo as raízes dos fatores lineares, então você vai ter que ter mais trabalho.

5. **Insira na equação do passo 3 os valores conhecidos de A e B e quaisquer dois valores para x não usados no passo 4 (números pequenos tornam os cálculos mais fáceis) para obter um sistema com duas equações em C e D.**

$A = 1$ e $B = 2$, então

Se $x = -1$

$$-18 = -10 - 10 - 2C + 2D$$
$$2 = -2C + 2D$$
$$1 = -C + D$$

Se $x = 2$

$$54 = 8 + 32 + 4C + 2D$$
$$14 = 4C + 2D$$
$$7 = 2C + D$$

6. **Resolva o sistema: $1 = -C + D$ e $7 = 2C + D$.**

   Você obtém $C = 2$ e $D = 3$. Faça-me um favor e verifique os meus cálculos.

7. **Separe a integral original e integre.**

   Usando os valores obtidos nos passos 4 e 6, $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$, e $D = 3$, e a equação do passo 2, você pode separar a integral original em três pedaços:

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx$$

E com a álgebra básica, você pode separar a terceira integral da direita em dois pedaços, resultando na decomposição em fração parcial final:

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{3}{x^2+4}\,dx$$

As duas primeiras integrais são fáceis. Para a terceira, você usa a substituição com $u = x^2 + 4$ e $du = 2xdx$. A quarta é feita com a regra do arco tangente da folha de consulta.

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$
$$= \ln|\,x\,(x-1)^2\,(x^2+4)\,| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Caso 3: O denominador contém fatores lineares ou quadráticos repetidos

Se o denominador tiver qualquer fator repetido, como $(x + 5)^4$ aqui está o que você deve fazer.

Digamos que você queira integrhnar $\int \frac{1}{x^2(x-1)^3}\,dx$. O x no denominador tem uma potência igual a 2, então você obtém duas frações parciais

para o x (para as potências 1 e 2); o $(x - 1)$ tem um potência igual a 3, então você obtém 3 frações parciais para esse fator (para as potências 1, 2, e 3). Aqui está a forma geral para a decomposição em fração parcial: $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$. Aqui está outra forma. Você divide $\frac{4x^3 - x^2 + 8}{(2x-3)^2 (x^2+1)^2}$ em $\frac{A}{(2x-3)} + \frac{B}{(2x-3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$. Eu estou pulando a solução para esses exemplos. O método é o mesmo dos casos 1 e 2 acima – apenas mais confuso. E, também, eu tenho um avião para pegar – de volta para a ensolarada Flórida.

Bônus: Equacionando coeficientes de termos semelhantes

Aqui está outro método para encontrar a incógnita maiúscula que você deve ter na sua bolsa de truques. Digamos que obtenha a equação a seguir para o passo 3 (isso vem de um problema com dois fatores quadráticos irredutíveis):

$$2x^3 + x^2 - 5x + 4 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)\ (x^2 + 2x + 2)$$

Essa equação não tem fatores lineares, então você não pode inserir as raízes para obter as incógnitas. Em vez disso, expanda o lado direito da equação:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 4 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2D$$

E reúna termos semelhantes: [1]

$$2x^3 + x^2 - 5x + 4 = (A + C)\ x^3 + (B + 2C + D)\ x^2 + (A + 2C + 2D)\ x + (B + 2D)$$

Depois equacione os coeficientes dos termos semelhantes dos lados esquerdo e direito da equação:

$$\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 1 &= B + 2C + D \\ -5 &= A + 2C + 2D \\ 4 &= B + 2D \end{aligned}$$

Você então resolve o sistema de equações simultâneas para obter A, B, C, e D.

Você pode terminar o exemplo do caso 2 usando uma versão mais curta do método para equacionar os coeficientes. Olhe para a equação no passo 3 do caso 2, e equacione os coeficientes do termo x^3 dos lados esquerdo e direito da equação. Você consegue ver, sem realmente fazer a expansão,

que na direita você obteria $(A + B + C)x^3$? (Se você não consegue ver isso, pule esse atalho – desculpe por lhe dar esperança). Então, $5x^3 = (A + B + C)\,x^3$, que significa que $5 = A + B + C$, e porque $A = 1$ e $B = 2$ (do passo 4), C deve ser igual a 2. Depois, usando esses valores para A, B, e C, e qualquer valor para x (com exceção de 0 e 1), você obtém D. O que você acha disso para um atalho simples?

Resumindo, você tem três maneiras para achar o seu A, B, C, e assim por diante: 1) Insira as raízes dos fatores lineares do denominador se houver algum, 2) Insira os outros valores de x e resolva o sistema de equações resultante, e 3) Equacione os coeficientes dos termos semelhantes. Com a prática, você vai ficar bom em combinar esses métodos para rapidamente encontrar as suas incógnitas.

Capítulo 16

Esqueça o Dr. Phill: Use a Integral para Resolver Problemas

Neste Capítulo

- Um teorema médio: "Altos e baixos ? Só na montanha russa"
- Somando a área entre as curvas
- Calculando volumes de formatos estranhos: carnes frias, panquecas, e rosquinhas
- Encontrando o comprimento e a área de superfície do arco
- A regra do hospital – caso estudar cálculo o deixe doente
- Conhecendo integrais sem modos
- O paradoxo da corneta de Gabriel

Como eu disse no Capítulo 13, a integração é basicamente apenas somar pequenos pedaços de alguma coisa para obter o total para a coisa toda – pedaços *muito, muito* pequenos, na verdade, pedaços *infinitamente* pequenos. Assim, a integral

$$\int_{5\text{ s.}}^{20\text{ s.}} \textit{pequenos pedaços da distância}$$

diz a você para somar todos os pequenos pedaços da distância viajada durante os 15 segundos de intervalo entre 5 até 20 segundos para obter a distância total viajada durante esse intervalo.

O pequeno pedaço em questão é sempre uma expressão contendo x (ou qualquer outra variável). Para a integral acima, por exemplo, o pequeno pedaço da distância pode ser dado por, digamos, x^2dx. Então a integral definida

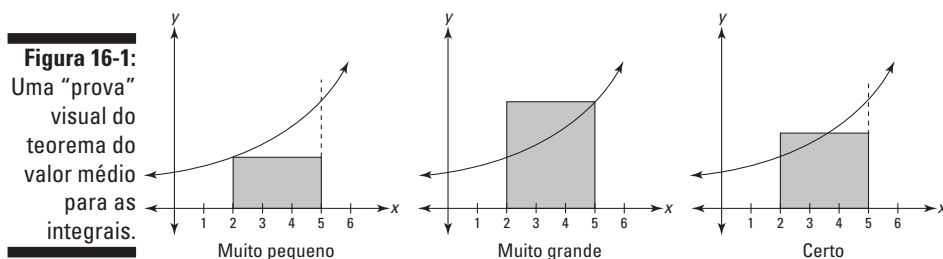
$$\int_{5}^{20} x^2dx$$

daria a você a distância total viajada. Pelo fato de você agora ser um especialista em calcular integrais como a que está acima, seu principal desafio nesse capítulo é simplesmente propor a expressão algébrica para os pequenos pedaços que você está somando.

Nesse capítulo, você usa integrais para resolver diversos problemas geométricos – área, volume, comprimento do arco e área da superfície. Você também descobre como encontrar a altura média da função e um atalho para os problemas envolvendo limites – a regra de L'Hôspital – que você precisa para as integrais *impróprias* (infinitas) no final do capítulo.

O Teorema do Valor Médio para as Integrais e Valor Médio

A melhor maneira de entender o Teorema do Valor Médio para integrais é com um diagrama – olhe a Figura 16-1.

Figura 16-1: Uma "prova" visual do teorema do valor médio para as integrais.

O gráfico da esquerda na Figura 16-1 mostra um retângulo cuja área é claramente *menor que* a área sob a curva entre 2 e 5. Esse retângulo tem uma altura igual ao menor ponto na curva no intervalo de 2 a 5. O gráfico do meio mostra um retângulo cuja altura é igual ao ponto mais alto na curva. Sua área é claramente *maior que* a área sob a curva. A esta altura você está pensando, "Não há um retângulo maior que o menor e menor do que o maior cuja área seja a *mesma* que a área sob a curva?". É claro. E esse retângulo cruza, com certeza, a curva em algum lugar no intervalo. O tão falado "retângulo de valor médio" mostrado à direita resume basicamente o Teorema do Valor Médio para as integrais. É, de verdade, apenas bom senso. Mas aqui está a bobagem.

O Teorema do Valor Médio para integrais: Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c no intervalo fechado que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.\,(b-a)$$

O teorema apenas garante, basicamente, a existência do retângulo de valor médio.

A área do retângulo de valor médio – que é o mesmo que a área sob a curva – é igual ao *comprimento* vezes a *largura*, ou base vezes a *altura*, certo? Então, se você dividir sua área, $\int_a^b f(x)dx$, pela sua base, $(b - a)$, você obterá a sua altura, *f(c)*. Essa altura é o *valor médio* da função sobre o intervalo em questão.

Valor médio: O *valor médio* de uma função *f(x)* sobre um intervalo fechado $[a, b]$ é

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

que é a altura do retângulo de valor médio.

Aqui está um exemplo. Qual a velocidade média de um carro entre $t = 9$ segundos e $t = 16$ segundos cuja velocidade em *metros por segundo* é dada pela função $f(t) = 30\sqrt{t}$? De acordo com a definição do valor médio, essa velocidade média é dada por $\int_9^{16} 30\sqrt{t}\ dt$.

1. **Determine a área sob a curva entre 9 e 16.**

$$\int_9^{16} 30\sqrt{t}\ dt$$
$$= 30\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_9^{16}$$
$$= 30\left(\frac{128}{3} - \frac{54}{3}\right)$$
$$= 740$$

Essa área, a propósito, é a distância total viajada de 9 até 16 segundos. Você vê por quê? Considere o retângulo de valor médio para esse problema. Sua altura é a velocidade (porque os valores da função, ou alturas, são velocidades) e sua base é uma quantidade do tempo, então sua área é *velocidade* vezes *tempo* que é igual à distância. Alternativamente, lembre que a posição da derivada é a velocidade (veja o Capítulo 12). Então, a antiderivada da velocidade – o que eu acabei de fazer nesse passo – é a posição, e a variação na posição de 9 até 16 segundos lhe dá a distância total viajada.

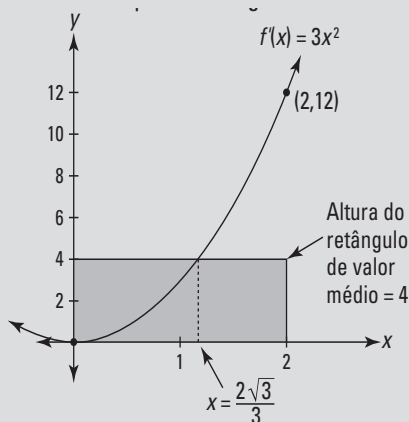
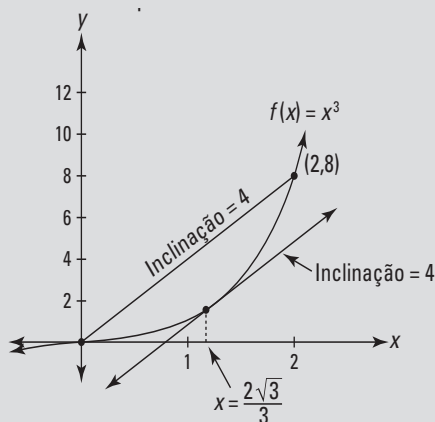
2. **Divida essa área, distância total, pelo intervalo de tempo de 9 até 16, a saber, 7.**

$$\text{Velocidade média} = \frac{\textit{distância total}}{\textit{tempo total}} = \frac{740\ \textit{metros}}{7\ \textit{segundos}}$$
$$\approx 105{,}7\text{metros } \textit{por segundo}$$

A definição de valor médio diz a você para multiplicar a área total por $\frac{1}{b-a}$, que nesse problema é $\frac{1}{16-9}$, ou $\frac{1}{7}$. Mas pelo fato de dividir por 7 ser a mesma coisa que multiplicar por $\frac{1}{7}$, você pode dividir como eu fiz nesse passo. Faz mais sentido pensar nesses problemas em termos da divisão: a *área* é igual à *base* vezes *altura*, então a altura do retângulo de valor médio é igual a sua área *dividida* pela sua base.

O TVM para as integrais e para as derivadas: Irmãos gêmeos

Você se lembra do Teorema do Valor Médio para as derivadas no Capítulo 11? O gráfico à esquerda na figura mostra como ele funciona. A ideia básica é que há um ponto na curva entre 0 e 2 onde a inclinação é a mesma que a inclinação da reta secante de (0,0) até (2,8) — isto é, uma inclinação igual a 4. Quando você faz os cálculos, você obtém $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ para esse ponto. Bom, constata-se que o ponto garantido pelo Teorema do Valor Médio para as integrais — o ponto onde o retângulo de valor médio cruza a derivada da curva da (mostrada à direita na figura) — tem o mesmo valor de x. Muito legal, né?

Se você quiser realmente entender a relação íntima entre a diferenciação e a integração, pense muito e arduamente sobre as muitas conexões entre os dois gráficos na figura que segue. Essa figura é uma verdadeira jóia, se eu assim digo (Para mais sobre a conexão entre a diferenciação/integração, dê uma olhada na minha outra favorita, a Figura 14-8).

- Em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a inclinação é 4 e esta é a inclinação média de f entre 0 e 2.
- A menor inclinação de f no intervalo é 0.
- A maior inclinação de f no intervalo é 12.
- O aumento total ao longo de f de 0 até 2 é 8.

- Em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a altura é 4 e esta é a altura média de f' entre 0 e 2.
- A menor altura de f' no intervalo é 0.
- A maior altura de f' no intervalo é 12.
- A área total sob f' de 0 até 2 é 8.

A Área Entre Duas Curvas – Duas Vezes a Diversão

Esse é o primeiro de sete tópicos nesse capítulo onde é pedido que você proponha uma expressão para um pequeno pedaço de alguma coisa, e depois some os pedaços usando a integração. Para esse primeiro tipo de problema, o pequeno pedaço é um retângulo estreito que senta sobre uma curva e sobe até a outra. Aqui está um exemplo: Encontre a área entre $y = 2 - x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$ de $x = 0$ até $x = 1$. Veja a Figura 16-2.

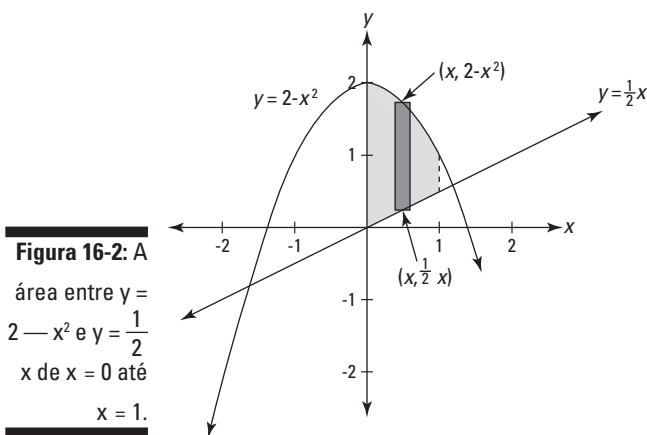



Figura 16-2: A área entre $y = 2 - x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$ de $x = 0$ até $x = 1$.

Para obter a altura do retângulo representativo na Figura 16-2, subtraia a coordena y da sua base da coordenada y da sua parte superior – isto é $(2 - x^2) - \frac{1}{2}x$. Sua base é o dx infinitesimal. Então, pelo fato de a ***área*** ser igual à ***altura*** vezes a ***base***,

$$\textit{Área do retângulo representativo} = \left((2 - x^2) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

Agora apenas some as áreas de todos os retângulos de 0 até 1 usando a

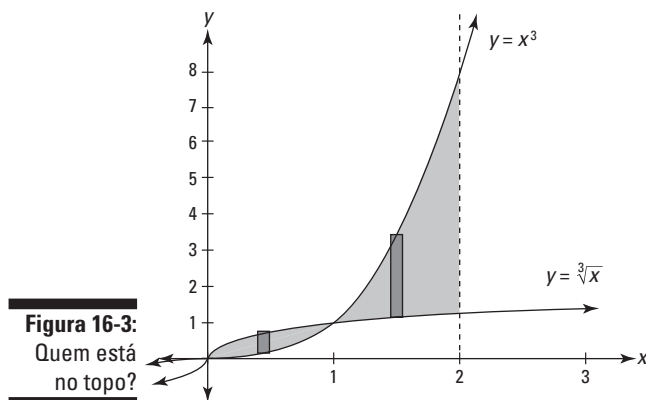
integração: $\int_0^1 \left((2 - x^2) - \frac{1}{2}x\right)dx$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \quad \text{(regra da potência para todos os três pedaços)}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0 - 0)$$

$$= \frac{17}{12} \textit{ unidades ao quadrado}$$

Agora para tornar as coisas um pouco mais distorcidas, no próximo problema as curvas se cruzam (veja a Figura 16-3). Quando isso acontece, você tem que dividir o total da área sombreada em regiões separadas antes de integrar. Tente essa aqui: Encontre a área entre $\sqrt[3]{x}$ e x^3 de $x = 0$ até $x = 2$.

Figura 16-3: Quem está no topo?

1. Determine onde as curvas se cruzam.

Elas se cruzam em (1,1) – que coincidência *maravilhosa*! Então você tem duas regiões separadas – uma de 0 até 1 e outra de 1 até 2.

2. Descubra a área da região da esquerda.

Para essa região, $\sqrt[3]{x}$ está acima de x^3. Então a altura do retângulo representativo é $\sqrt[3]{x} - x^3$, sua área é a *altura* vezes a *base*, ou $(\sqrt[3]{x} - x^3)\,dx$, e a área da região é, então

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. Encontre a área da região da direita.

Agora, x^3 está acima de $\sqrt[3]{x}$, então a altura de um retângulo é $x^3 - \sqrt[3]{x}$ e assim você tem

$$\int_1^2 (x^3 - \sqrt[3]{x})\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^2$$

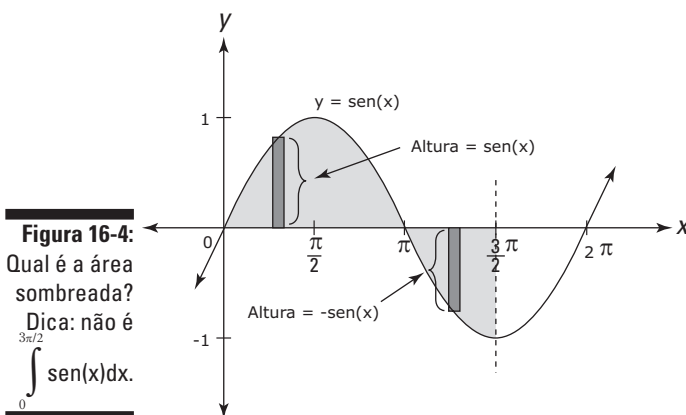
$$= \left(4 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)$$
$$= 4{,}5 - 1{,}5\sqrt[3]{2}$$

4. Some as áreas das duas regiões para obter a área total.

$$0{,}5 + 4{,}5 - 1{,}5\sqrt[3]{2} = 5 - 1{,}5\sqrt[3]{2} \approx 3{,}11 \textit{ unidades ao quadrado}$$

Note que a altura de um retângulo representativo é sempre seu *topo* menos sua *base*, independentemente de esses números serem positivos ou negativos. Por exemplo, um retângulo que vai de 20 até 30 tem uma altura de 30 – 20, ou 10; um retângulo que vai de –3 até 8 tem uma altura de 8 – (–3), ou 11; e um retângulo que vai de –15 até –10 tem uma altura igual a -10 – (–15), ou 5.

Se você pensar nesse método do topo menos a base para encontrar a altura de um retângulo, você pode ver agora – supondo que você já não viu – porque a integral definida de uma função considera a área abaixo do eixo *x* como negativa (Eu menciono isso sem explicação no Capítulo 13). Por exemplo, considere a Figura 16-4.

Figura 16-4: Qual é a área sombreada? Dica: não é $\int_0^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$.

Se você quiser a área total da região sombreada mostrada na Figura 16-4, você tem que dividir a área sombreada em dois pedaços separados como você fez no último problema. Um pedaço vai de 0 até π e o outro vai de π até $\frac{3\pi}{2}$.

Para o primeiro pedaço, de 0 até π, o retângulo representativo tem um altura igual a função, y = sen(x), porque sua parte superior está na função e sua base está no zero – e, é claro, qualquer coisa menos zero é ela mesma. Então a área desse primeiro pedaço é dada pela integral definida $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx$.

Mas para o segundo pedaço de π até $\frac{3\pi}{2}$, a parte superior do retângulo representativo está no zero – lembre que o eixo x é a linha $y = 0$ – e sua base está em y = sen(x), então sua altura é 0 – sen(x), ou apenas – sen(x). Então, para obter a área desse segundo pedaço, você descobre a integral definida do ***negativo*** da função, $\int_{\pi}^{3\pi/2} -\text{sen}(x)dx$, que é o mesmo que $-\int_{\pi}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$.

Devido ao fato de essa integral ***negativa*** lhe dar a área comum, ***positiva*** do pedaço abaixo do eixo x , a integral definida ***positiva*** $\int_{0}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$ lhe dá a área ***negativa***. É por isso que se você descobrir a integral definida $\int_{0}^{3\pi/2}$ sen(x)dx sobre todo o intervalo, o pedaço abaixo do eixo x é considerado como uma área negativa, e a resposta lhe dá o líquido da área acima do eixo x menos a área abaixo do eixo – em vez da área total sombreada.

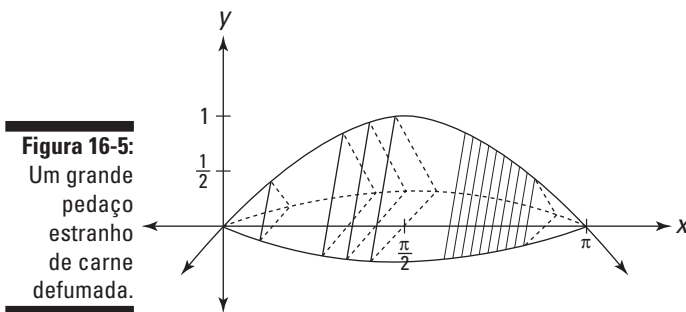
Encontrando os Volumes de Sólidos Estranhos

Em geometria, você aprendeu como encontrar os volumes de sólidos simples como caixas, cilindros e esferas. A integração permite que você calcule os volumes de uma variedade interminável de formatos muito mais complicados.

O método do cortador de carne

Essa metáfora é na verdade muito precisa. Imagine um pedaço grande de carne sendo cortado em pedaços muito finos naqueles cortadores de carne congelada. Essa é a idéia básica aqui. Você fatia um formato tridimensional, depois soma os volumes dos pedaços para determinar o volume total.

Aqui está um problema: Qual é o volume do sólido cujo comprimento corre ao longo do eixo x de 0 até π e cujos cortes transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos eqüiláteros tais que os pontos médios das suas bases estejam no eixo x e seus vértices superiores estejam na curva y = sen(x)? Isso é um bocado ou o quê? Esse problema é quase tão difícil de explicar e desenhar como fazê-lo. Dê uma olhada nessa coisa na Figura 16-5.

Figura 16-5: Um grande pedaço estranho de carne defumada.

Então, qual é o volume?

1. **Determine a área de qualquer corte transversal.**

   Cada corte transversal é um triângulo equilátero com altura igual a $\text{sen}(x)$. Se você fizer a geometria, você vai ver que sua base é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ vezes sua altura, ou $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}(x)$ (Dica: Metade de um triângulo eqüilátero é um triângulo 30º - 60º - 90º). Então, a área do triângulo, dada por $A = \frac{1}{2}(b)(h)$ é $\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}(x)\right)\text{sen}(x)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2 x$.

2. **Encontre o volume de um pedaço característico.**

   O volume de um pedaço é apenas seu corte transversal vezes sua espessura infinitesimal, dx. Então você obteve o volume

   $$\textit{Volume do pedaço característico} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2(x)\, dx$$

3. **Some os volumes dos pedaços de 0 até π usando a integração.**

   Se o que vem a seguir parecer um pouco difícil, bem, paciência, é melhor você se acostumar. Afinal de contas, isso é cálculo (Na verdade, não é tão ruim assim se você o fizer pacientemente, passo a passo).

   $$\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2(x)\, dx$$

   $$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\pi} \text{sen}^2(x) dx$$

   $$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx$$ (integrais trigonométricas com senos e co-senos, caso 3, do Capítulo 15)

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\int_0^{\pi} 1dx - \int_0^{\pi} \cos(2x)dx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left([x]_0^{\pi} - \left[\frac{\text{sen}(2x)}{2}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\pi - 0 - \left(\frac{\text{sen}(2\pi)}{2} - \frac{\text{sen}(0)}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\pi - 0 - (0 - 0)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$\approx 0{,}91 \textit{ unidades cúbicas}$$

É muito fácil.

O método da pilha de panquecas

A técnica é basicamente a mesma do método do cortador de carne – na verdade, é um caso especial do método do cortador de carne que você usa quando os cortes transversais são círculos. Aqui está como funciona. Encontre o volume do sólido – entre $x = 2$ e $x = 3$ – formado ao girar a curva $y = e^x$ sobre o eixo x. Veja a Figura 16-6.

1. **Determine a área de qualquer corte transversal ou panqueca representativa.**

Cada corte transversal é um circulo com um raio de e^x. Então, sua área é dada pela fórmula para a área de um círculo, $A = \pi r^2$. Inserindo e^x no lugar de r você tem

$$A = \pi(e^x)^2 = \pi e^{2x}$$

2. **Junte um *dx* para obter o volume de uma panqueca representativa infinitesimalmente fina.**

$$\textit{Volume da panquenca} = \overbrace{\pi e^{2x}}^{\textit{área}} \cdot \overbrace{dx}^{\textit{profundidade}}$$

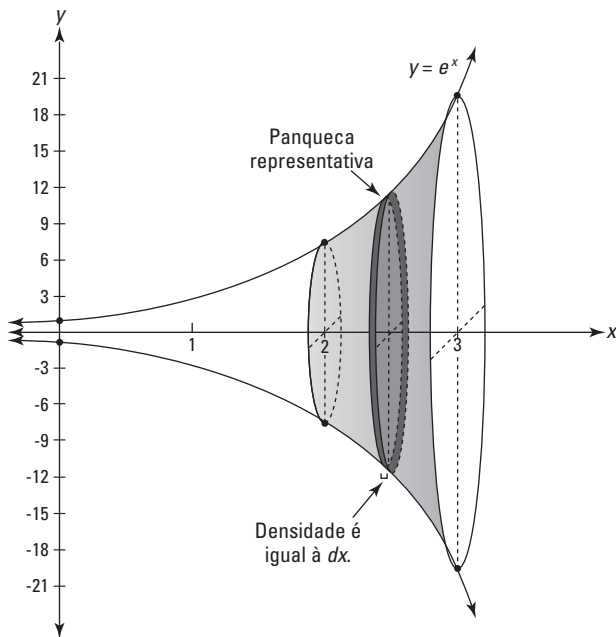



Figura 16-6: Uma pilha de panquecas de lado.

3. Some os volumes das panquecas de 2 até 3 usando a integração.

$$\text{Volume total} = \int_2^3 \pi e^{2x}\,dx$$

$$= \pi \int_2^3 e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_2^3 \quad \text{(pela substituição com } u = 2x \text{ e } du = 2dx\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^6 - e^4\right)$$

$$\approx 548 \;\; \textit{unidades cúbicas}$$

O método da pilha de rosquinhas nas quais alguém sentou em cima

Outros livros chamam isso de método da argola, mas qual a diversão disso? A única diferença entre o método da rosquinha e o método da panqueca é que agora cada pedaço tem um furo no meio que você tem que subtrair. Nada além disso.

Aqui vai. Pegue a área delimitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ e crie um sólido girando essa área sobre o eixo x. Veja a Figura 16-7.

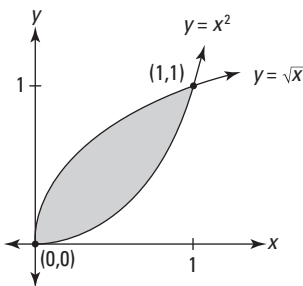
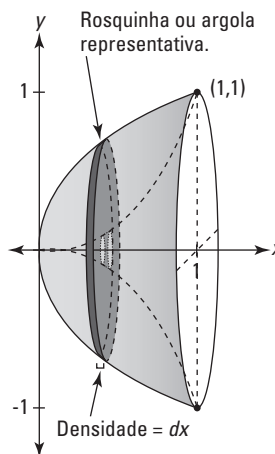



Figura 16-7: Uma pilha de rosquinhas de lado — apenas some os volumes de todas as rosquinhas.

Apenas pense: Todas as forças do universo em desenvolvimento e todas as reviravoltas da sua vida lhe trouxeram para *esse* momento quando você está finalmente apto a calcular o volume desse sólido – algo para o seu diário. Então qual é o volume?

1. **Determine onde as duas curvas se interceptam.**

   Não é preciso muita habilidade para ver que $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ se interceptam em $x = 0$ e $x = 1$ – muito bom isso, não? Então o sólido em questão atravessa o intervalo no eixo x de 0 até 1.

2. **Descubra a área de um corte transversal fino da rosquinha ou da argola.**

   Cada pedaço tem a forma de uma rosquinha – veja a Figura 16-8 – então sua área é igual à área de todo o círculo menos a área do buraco.

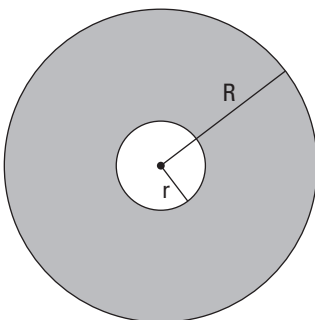



Figura 16-8: A área sombreada é igual a $\pi R^2 — \pi r^2$: o todo menos o buraco — entendeu?

A área do círculo menos o buraco é $\pi R^2 — \pi r^2$, onde R é o raio mais externo (o raio maior) e r é o raio do buraco (o raio menor). Para esse problema, o raio mais externo é $\sqrt{x}$ e o raio do buraco é x^2, então isso lhe dá

$$\begin{aligned} A &= \pi\,(\sqrt{x})^2 - \pi(x^2)^2 \\ &= \pi x - \pi x^4 \end{aligned}$$

3. Multiplique essa área pela profundidade, *dx*, para obter o volume de uma rosquinha representativa esmagada.

$$Volume = (\pi x - \pi x^4)dx$$

4. Some os volumes das rosquinhas finas como papel de 0 a 1 pela integração.

$$\begin{aligned}
Volume\ total &= \int_0^1 (\pi x - \pi x^4)dx \\
&= \pi \int_0^1 (x - x^4)dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0 - 0) \right] \\
&= \pi \left(\frac{3}{10} \right) \\
&= \frac{3\pi}{10} \\
&\approx 0{,}94\ \textit{unidades cúbicas}
\end{aligned}$$

Preste atenção ao simples fato de a área da rosquinha ou argola ser a área de todo o disco, πR^2, menos a área do buraco, πr^2: $A = \pi R^2 - \pi r^2$. Quando você integra, você obtém $\int_a^b (\pi R^2 - \pi r^2)dx$. Isso é o mesmo, é claro, que $\pi \int_a^b (R^2 - r^2)dx$, que é a fórmula dada na maioria dos livros. Mas se você apenas aprender isso automaticamente, você talvez esqueça. Você vai lembrar melhor como fazer esses problemas se você entender a simples idéia do círculo grande menos o círculo pequeno.

O método das bonecas russas aninhadas uma dentro da outra

Agora você vai cortar um sólido em cilindros concêntricos finos e depois somar os volumes de todos os cilindros. É mais ou menos como essas bonecas russas cabem uma dentro da outra. Ou imagine uma lata de sopa que de alguma forma tem muitos rótulos, cada um cobrindo o outro de baixo. Ou pense naquelas brincadeiras de embrulhar caixas com vários papéis de presente. Cada rótulo da lata de sopa ou pedaço de papel é uma casca – antes de você rasgá-la, é claro. Depois que você rasga, é um retângulo comum.

Aqui está um problema: Um sólido é criado pegando-se a área limitada pelo eixo x, as linhas $x = 2$ e $x = 3$, e $y = e^x$, e depois girando ela sobre o eixo y. Veja a Figura 16-9.

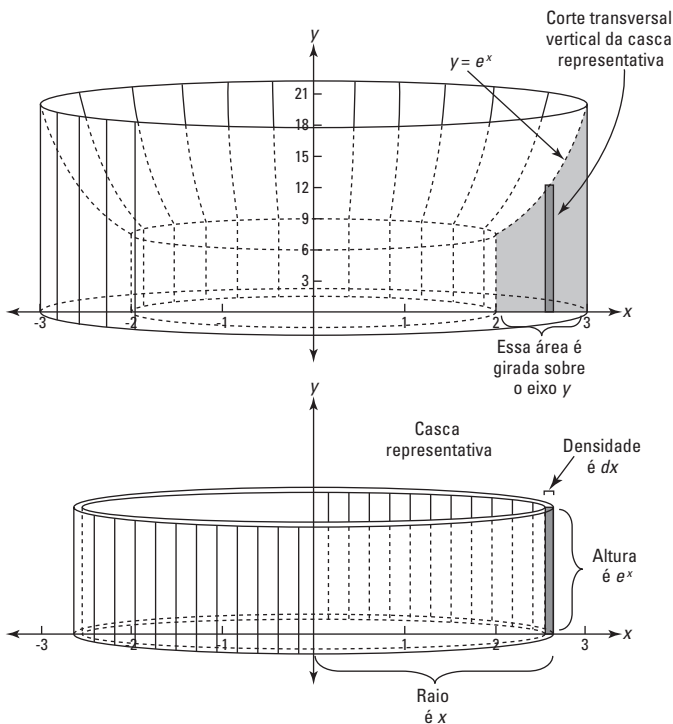



Figura 16-9: Um formato mais ou menos como o Coliseu e uma das suas cascas representativas.

Qual é o volume?

1. **Determine a área de uma casca cilíndrica representativa.**

Ao imaginar uma casca representativa, concentre-se em uma casca que não está em nenhum lugar em particular. A Figura 16-9 mostra esse tipo de casca comum. Seu raio é desconhecido, x, e sua altura é a altura da curva em x, a saber, e^x. Se, em vez disso, você usar uma casca especial como a casca mais externa com um raio de 3, você vai mais facilmente cometer o erro de pensar que uma casca representativa tem algum raio *conhecido* como 3 ou uma altura *conhecida* como e^x. Tanto o raio quanto a altura são *desconhecidas* (Esse mesmo conselho se aplica aos problemas da panqueca e da rosquinha).

Cada casca representativa, como o rótulo da lata de sopa ou o papel adesivo da fibra, é apenas um retângulo cuja área é, é claro, *comprimento* vezes *largura*. O rótulo retangular da lata de sopa envolve toda a lata, então seu comprimento é a circunferência da lata, a saber, $2\pi r$; a largura do rótulo é a altura da lata. Então agora você tem a fórmula geral para a área da casca representativa:

$$\begin{aligned} \textit{Área} &= \textit{comprimento} \cdot \textit{largura} \\ &= 2\pi r \,.\, H \end{aligned}$$

Para o problema atual, você insere x para o raio e e^x para a altura, dando a você a área da casca representativa:

$$\text{Área de concha} = 2\pi x \cdot e^x$$

2. **Multiplique a área pela espessura da casca, *dx*, para obter o volume.**

$$\text{Volume da casca infinitesimal} = 2\pi x e^x dx$$

3. **Some os volumes de todas as cascas de 2 até 3 usando a integração.**

$$\begin{aligned}\text{Volume total} &= \int_2^3 2\pi x e^x dx \\ &= 2\pi \int_2^3 x e^x dx \\ &= 2\pi \left[x e^x - e^x \right]_2^3 \qquad \text{(integração por partes)} \\ &= 2\pi \left(2e^2 - e^3 - \left(2e^2 - e^2 \right) \right) \\ &= 2\pi \left(2e^3 - e^2 \right) \\ &\approx 206 \text{ unidades cúbicas}\end{aligned}$$

Com os métodos do cortador de carne, da panqueca e da rosquinha, é geralmente muito óbvio quais devem ser os limites da integração (lembre-se que os *limites da integração* são, por exemplo, o 1 e o 5 em $\int_1^5$). Com as cascas cilíndricas, no entanto, não é sempre tão claro. Aqui vai uma dica. Você integra da margem *direita* do cilindro menor para a margem *direita* do cilindro maior (como de 2 para 3 no problema anterior). E note que você nunca integra da margem esquerda para a margem direita do cilindro maior (como de -3 para 3).

Analisando o Comprimento do Arco

Até agora nesse capítulo, você somou as áreas de retângulos finos para obter a área total, os volumes dos pedaços finos para obter o volume total, e os volumes de cilindros finos para também obter o volume total. Agora, você vai somar pequenos comprimentos ao longo de uma curva, de um "arco", para obter o comprimento total.

Eu poderia apenas lhe dar a fórmula para o comprimento do arco, mas eu prefiro mostrar a você porque ela funciona e como derivá-la. Você tem sorte.

A ideia é dividir o comprimento da curva em pedaços pequenos, descobrir o comprimento de cada pedaço, e depois somar todos os comprimentos.

A Figura 16-10 mostra como cada pedaço de uma curva pode ser aproximado pela hipotenusa de um pequeno triângulo retângulo.

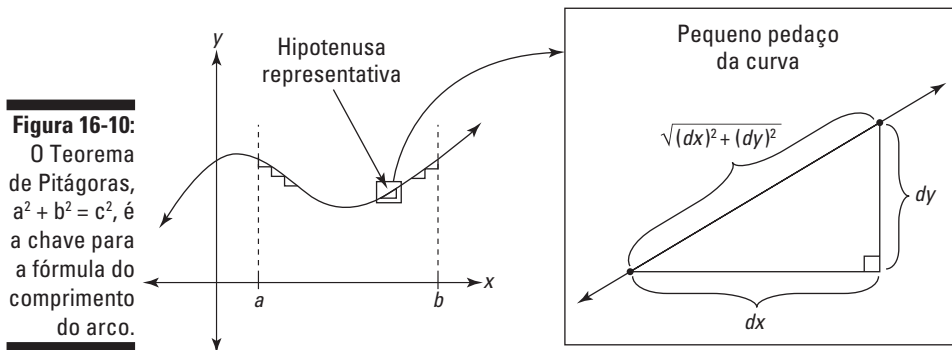



Figura 16-10: O Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, é a chave para a fórmula do comprimento do arco.

Você pode imaginar que à medida que você amplia cada vez mais, dividindo a curva em mais e mais pedaços, as pequenas seções ficam cada vez mais retas e a hipotenusa cada vez mais se aproxima da curva. É por isso – quando esse processo de somar pedaços cada vez menores é levado ao limite – que você obtém o comprimento *exato* da curva.

Então, tudo o que você tem a fazer é somar todas as hipotenusas ao longo da curva entre seus pontos de partida e de chegada. Os comprimentos das partes de cada triângulo infinitesimal são *dx* e *dy*, e assim o comprimento da hipotenusa – dada pelo Teorema de Pitágoras – é

$$\sqrt{(dx) + (dy)^2}$$

Para somar todas as hipotenusas de *a* até *b* ao longo da curva, você apenas integra:

$$\int_a^b \sqrt{(dx) + (dy)^2}$$

Um pequeno ajuste e você tem a fórmula para o comprimento do arco. Primeiro, fatore o $(dx)^2$ dentro da raiz quadrada e simplifique:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)\left[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)}\right]} = \int_a^b \sqrt{(dx)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

Agora você pode tirar a raiz quadrada de (dx) – isto é, dx, é claro – e trazer para fora do radical, e, voilà, você obteve a fórmula.

Comprimento do arco: O *comprimento do arco* ao longo da curva, $y = f(x)$, de *a* até *b*, é dado pela integral a seguir:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(dx)$$

A expressão dentro dessa integral é simplesmente o comprimento de uma hipotenusa representativa.

Tente esse aqui: Qual é o comprimento ao longo de $y = (x - 1)^{3/2}$ de $x = 1$ até $x = 5$?

1. Tire a derivada da sua função.

$$y = (x-1)^{3/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$$

2. Insira isso na fórmula e integre.

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(dx)$$
$$= \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\,dx$$
$$= \int_1^5 \left(\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}\right)^{1/2} dx$$
$$= \left[\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}\right)^{3/2}\right]_1^5$$

(Você viu como eu obtive isso, não viu? É a técnica da integração de adivinhar e verificar com a regra inversa da potência. O $^4/_9$ é a quantidade mudada que você precisa por causa do coeficiente $^9/_4$).

$$= \left[\frac{1}{27}(9x-5)^{3/2}\right]_1^5$$ (Perguntas algébricas são estritamente proibidas!)

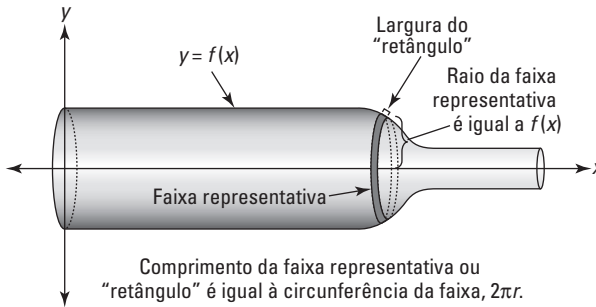
$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{40}\right) - \frac{1}{27}\cdot 8$$
$$= \frac{8}{27}\left(\left(\sqrt{10}\right) - 1\right)$$
$$\approx 9{,}07 \text{ } \textit{unidades}$$

Agora se você alguma vez se achar em uma rua com o formato $y = (x - 1)^{3/2}$ e o seu hodômetro estiver quebrado, você pode descobrir o comprimento exato do seu percurso. Seus amigos irão ficar muito impressionados – ou muito preocupados.

Superfícies de Revolução – Passe a Garrafa de Pessoa para Pessoa

Uma superfície de revolução é uma superfície tridimensional com um corte transversal circular, como um vaso ou um sino ou uma garrafa de

vinho. Para esses problemas, você divide a superfície em faixas circulares estreitas, descobre a área da superfície de uma faixa representativa, e depois apenas soma as áreas de todas as faixas para obter a área total da superfície. A Figura 16-11 mostra esse tipo de forma com uma faixa representativa.

Figura 16-11: O problema da garrafa de vinho. Se você estiver cansado de cálculo, relaxe e dê uma olhada no livro Vinho Para Leigos — é um Best seller.

Qual é a área da superfície de uma faixa representativa? Bom, se você cortar a faixa e a desenrolar, você obtém um tipo de retângulo longo, estreito cuja área, é claro, é o *comprimento* vezes a *largura*. O retângulo envolve toda a superfície circular, então seu comprimento é a circunferência do corte transversal circular, ou $2\pi r$, onde r é a altura da função (para problemas de tipos de jardim, de qualquer maneira). A largura do retângulo ou faixa é a mesma que o comprimento da hipotenusa infinitesimal que você usou no tópico do comprimento do arco, a saber, $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Assim, a área da superfície de uma faixa representativa, do *comprimento* vezes a *largura*, é $2\pi r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, o que nos trás para a fórmula.

Superfície de revolução: A superfície gerada girando a função, $y = f(x)$, sobre um eixo tem uma área de superfície – entre a e b – dada pela integral a seguir:

$$\int_a^b 2\pi r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Se o eixo da revolução for o eixo x, r será igual a $f(x)$ – como mostrado na Figura 16-11. Se o eixo de revolução for alguma outra linha, como $y = 5$, é um pouco mais complicado – algo para se estar ansioso.

Agora tente um: Qual é a área da superfície – entre $x = 1$ e $x = 2$ – da superfície gerada girando-se $y = x^3$ sobre o eixo x. Veja a Figura 16-12.

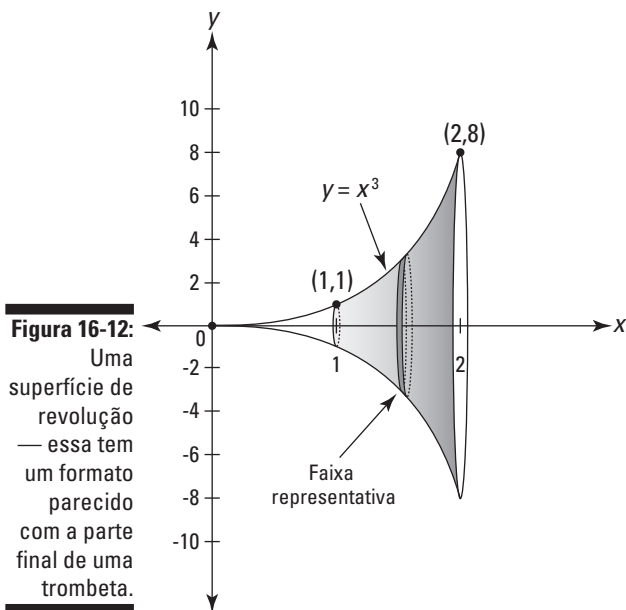



Figura 16-12: Uma superfície de revolução — essa tem um formato parecido com a parte final de uma trombeta.

1. **Pegue a derivada da sua função.**

$$y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Agora você pode terminar o problema apenas inserindo tudo na fórmula, mas eu quero fazer isso passo a passo para reforçar a idéia que toda vez que você integra, você escreve um pequeno pedaço representativo de algo – isso é o integrando – depois você soma todos esses pequenos pedaços pela integração.

2. **Descubra a área da superfície de uma faixa representativa estreita.**

O raio da faixa é x^3, então sua circunferência é $2\pi\, x^3$ – isto é, o

"comprimento" da faixa. Sua largura, uma hipotenusa minúscula, é $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{[1 + (3x^2)^2}\, dx$. E, assim, sua área – *comprimento* vezes *largura* – é $2\pi x^3\sqrt{[1 + (3x^2)^2}\, dx$.

3. Some as áreas de todas as faixas de 1 até 2 usando a integração.

$$\int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_1^2 36x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$ (O 36 é o valor mudado para a substituição em u; veja a próxima linha da equação)

$$= \frac{\pi}{18} \int_{10}^{145} u^{1/2}\,du$$ (substituição com $u = 1 + 9x^4$, $du = 36x^3dx$; quando, $x = 1$, $u = 10$; quando $x = 2$, $u = 145$)

$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{10}^{145}$$

$$= \frac{\pi}{18} \left(\frac{2}{3} \cdot 145^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot 10^{3/2}\right)$$

$\approx 199{,}5$ *unidades ao quadrado*

Regra de L'Hôpital: Cálculo para o Doente

A regra de L'Hôpital é um ótimo atalho para fazer problemas envolvendo limites.Você se lembra dos limites – dos Capítulos 7 e 8 – como $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$? A propósito, se você estiver se perguntando por que eu estou mostrando isso agora, é porque (a) você talvez precise dele algum dia para resolver algum problema de integral imprópria (o assunto do próximo tópico desse capítulo), apesar de não fazermos esse tipo de problema, e (b) você também precisa dele para alguns problemas de séries infinitas no Capítulo 17.

Assim como a maioria dos problemas envolvendo limites – não considerando os problemas óbvios – você não pode fazer $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ com a substituição direta: inserindo 3 no lugar de x, você obtém $\frac{0}{0}$, que é indefinido. No Capítulo 8, você fatorou o numerador em $(x - 3)(x + 3)$ e depois cancelou o $(x - 3)$. Isso lhe deixou com $\lim_{x \to 3}(x + 3)$, que é igual a 6.

Agora veja como é fácil pegar o limite com a regra de L'Hôpital. Apenas pegue a derivada do numerador e do denominador. Não use a regra do quociente; apenas pegue as derivadas do numerador e do denominador separadamente. A derivada de $x^2 - 9$ é $2x$ e a derivada de $x - 3$ é 1. A regra

de L'Hôpital deixa você substituir o numerador e o denominador pelas suas derivadas assim:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1}$$

O novo limite é óbvio: $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$

Isso é tudo que há. A regra de L'Hôpital transforma o limite que você não pode fazer com a substituição direta em um que você pode fazer com a substituição. Isto é o que o faz ser um ótimo atalho.

Regra de L'Hôpital: Deixe f e g serem funções diferenciáveis. Se o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ à medida que x se aproxima de c produzir $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ quando você substituir x pelo valor de c, então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Note que esse c pode ser um número ou $\pm\infty$.

Aqui está um exemplo envolvendo $\frac{\infty}{\infty}$: Qual é o $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$? A substituição direta lhe dá $\frac{\infty}{\infty}$, então você pode usar a regra de L'Hôpital. A derivada de $\ln(x)$ é $\frac{1}{x}$, e a derivada de x é 1, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Tente outro: Avalie $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$. A substituição lhe dá $\frac{0}{0}$, então a regra de L'Hôpital se aplica. A derivada de $e^{3x} - 1$ é $3e^{3x}$ e a derivada de x é 1, assim

$$\lim_{x \to 0} = \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} = \frac{3e^{3x}}{1} = \frac{3 \cdot 1}{1} = 3$$

A bobagem diz que para usar a regra de L'Hôpital, a substituição deve produzir ou $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Você deve obter uma dessas formas "indetermináveis" aceitáveis para aplicar o atalho. Não se esqueça de verificar isso.

Colocando as formas inaceitáveis em forma

Se a substituição produzir uma das formas inaceitáveis, $\pm\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$, você tem que primeiro ajustar o problema para obter uma forma aceitável antes de suar a regra de L'Hôpital.

Por exemplo, encontre $\lim_{x \to \infty}(e^x\sqrt{x})$. A substituição lhe dá $0 \cdot \infty$, então você teve que ajustar ele:

$$\lim_{x \to \infty}(e^x\sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)$$

Agora você tem o caso $\frac{\infty}{\infty}$, então você está pronto para usar a regra de L'Hôpital. A derivada de $\sqrt{x}$ é $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, e a derivada de e^x é e^x, então

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^\infty}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\infty}}}{e^\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Mais três formas inaceitáveis

Quando a substituição produzir $1^{\pm\infty}$, 0^0, ou ∞^0, use o truque do logaritmo a seguir para obter uma forma indeterminada aceitável. Por exemplo, encontre $\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x$ (lembre-se do Capítulo 7 que o $\lim_{x \to 0^+}$ significa que x se aproxima de 0 apenas pela direita; este é um limite *de um lado*). A substituição lhe dá 0^0, então você faz o seguinte.

1. **Iguale o limite a *y*.**

   $y = \lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x$

2. **Tire o log de ambos os lados.**

   $\ln(y) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x\right)$

   $\ln(y) = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln(\text{sen}x)^x\right)$ (leve em conta o que eu digo)

   $= \lim_{x \to 0^+}\left(x\ln(\text{sen}x)\right)$ (É melhor revisar as regras dos logaritmos no Capítulo 4 se você não entender isso)

3. **Esse limite é um caso 0 – ∞, então ajuste ele.**

   $$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln(\text{sen}x)}{\frac{1}{x}}\right)$$

4. **Agora você tem um caso $\frac{-\infty}{\infty}$, então você pode usar a regra de L'Hôpital.**

   A derivada de $(\ln(\text{sen}(x))$ é $\frac{1}{(\text{sen}x)} \cdot \cos(x)$, ou $\text{cotg}(x)$, e a derivada de $\frac{1}{x}$ é $-\frac{1}{x^2}$, então

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\text{cotg}x}{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{-x^2}{\text{tg}(x)}\right)$$

5. **Esse é um caso $\frac{0}{0}$, então usa a regra de L'Hôpital de novo.**

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{-2x}{\sec^2 x}\right)$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

Calma! Essa ainda não é a resposta

6. **Ache o valor de *y*.**

Você pode ver que a resposta de 0 no passo 5 é a resposta para a equação lá de trás no passo 2: $\ln(y) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x\right)$? Então, o 0 no passo 5 diz a você que

$\ln(y) = 0$. Agora ache o valor de y:

$$\ln(y) = 0$$

$$y = 1$$

Pelo fato de você ter igualado o limite a y no passo 1, isso, finalmente, é a sua resposta:

$$\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x = 1$$

Não cometa o erro de pensar que você pode usar aritmética básica ou as leis dos expoentes ao lidar com qualquer forma indeterminada aceitável ou inaceitável. Pode parecer que $\infty - \infty$ deva ser igual a zero, por exemplo, mas não é. Da mesma maneira, $0 \cdot \infty \neq 0$, $\frac{0}{0} \neq 1$, $0^0 \neq 1$, $\infty^0 \neq 1$, e $1^\infty \neq 1$.

Integrais Impróprias: Basta Olhar Para a Maneira Como a Integral está Segurando o Seu Garfo!

Integrais definidas são *impróprias* quando elas vão infinitamente para cima, para baixo, para a direita, ou para a esquerda. Elas vão infinitamente longe para cima ou para baixo em problemas do tipo $\int_2^4 \frac{1}{x-3}dx$ que tem uma ou mais assíntotas verticais. Elas vão infinitamente longe à direita ou à esquerda em problemas do tipo $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, ou $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$, onde um

ou ambos os limites da integração são infinitos (Há outros poucos tipos estranhos de integrais impróprias, mas elas são raras – não se preocupe com elas). Faria sentido apenas usar o termo *infinito* em vez de *impróprio* para descrever essas integrais, exceto pelo fato marcante de que muitas dessas integrais "infinitas" têm uma área *finita*. Mais sobre isso em um minuto.

Você revolve ambos os tipos de integrais impróprias transformando-as em problemas envolvendo limites. Você somente não pode fazê-los da forma regular. Dê uma olhada em alguns exemplos.

Integrais impróprias com assíntotas verticais

Uma assíntota vertical pode estar na margem da área em questão ou no meio dela.

Uma assíntota vertical em um dos limites da integração

Qual é a área sob $y = \frac{1}{x}$ de 0 até 1? Essa função é indefinida em $x = 0$, e ela tem uma assíntota vertical aí. Então você tem que transformar a integral definida em um limite:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$ (a área em questão é a direita do zero, então c se aproxima do zero pela direita)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{1}{x}\right]_c^1$$ (regra inversa da potência)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left((-1) - \left(-\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$= -1 - (-\infty)$$

$$= -1 + \infty$$

$$= \infty$$

Essa área é infinita, o que provavelmente não o surpreende porque a curva sobe infinitamente. Mas fique calmo, apesar do fato de a próxima função também subir infinitamente em $x = 0$, sua área é infinita!

Encontre a área sob $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ de 0 até 1. Essa função também é indefinida em $x = 0$, então o processo é o mesmo do exemplo anterior.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_c^1$$ (regra inversa da potência)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}c^{2/3}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - 0$$
$$= \frac{3}{2}$$

Convergência e divergência: Você diz que a integral imprópria *converge* se o limite existir, isto é, se o limite for igual a um número finito como no segundo exemplo. Caso contrário, a integral imprópria é diga *divergente* – como no primeiro exemplo. Quando uma integral imprópria diverge, a área em questão (ou parte dela) é igual a ∞ ou – ∞.

Uma assíntota vertical entre os limites da integração

Se o ponto indefinido do integrando estiver em algum lugar entre os limites da integração, você divide a integral em duas – no ponto indefinido – e depois transforma cada integral em um limite e começa daí. Avalie $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. Esse integrando é indefinido em $x = 0$.

1. **Divida a integral em duas no ponto indefinido.**

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

2. **Transforme cada integral em um limite e avalie.**

Para a integral $\int_{-1}^{0}$, a área é à esquerda do zero, então c se aproxima do zero pela esquerda. Para a integral $\int_{0}^{8}$, a área é à direita do zero, então c se aproxima do zero pela direita.

$$= \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{2/3}\right]_{-1}^{c} \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{2/3}\right]_{c}^{8}$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left(\frac{3}{2} c^{2/3} - \frac{3}{2}\right) \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \left(6 - \frac{3}{2} c^{2/3}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} \quad + \quad 6$$

$$= 4{,}5$$

Se você falhar em notar que a integral tem um ponto indefinido entre os limites da integração, e você integrar da maneira comum, você talvez obtenha a resposta errada. O problema acima, $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, acontece de dar certo se você o fizer da maneira comum. No entanto, se você fizer $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ da maneira

comum, você não apenas obtém a resposta errada como também uma resposta totalmente absurda de 2 *negativo*, apesar do fato de a função ser positiva de -1 até 1. Moral da história: *não arrisque*.

Se uma das partes da integral dividida divergir, a integral original diverge. Você não pode obter, digamos, -∞ para uma parte e ∞ para a outra parte e depois somar para obter zero.

Integrais impróprias com um ou dois limites infinitos de integração

Você faz essas integrais impróprias transformando-as em limites onde *c* se aproxima do infinito ou do infinito negativo. Aqui estão dois exemplos: $\int_{1} \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{c}$$

$$= \lim_{c \to \infty} \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right)$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

Então essa integral imprópria *converge*.

Na próxima integral, o denominador é menor – x em vez de x^2 – e assim a fração é *maior*, então você esperaria $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ ser maior que $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$, o que é. Mas não é apenas maior, é *muito, muito* maior.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{c \to \infty} [\ln x]_{1}^{c}$$

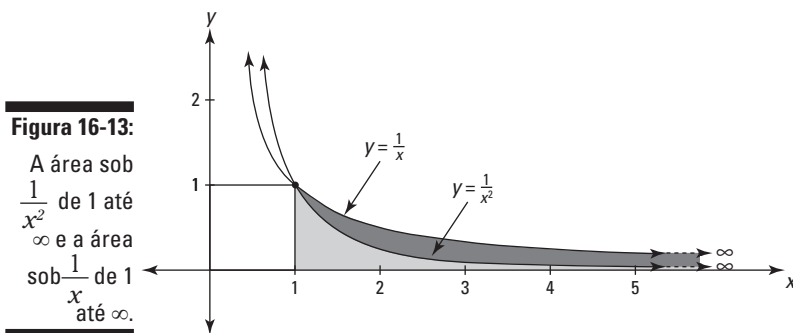
$$= \lim_{c \to \infty} (\ln c - \ln 1)$$

$$= \infty - 0$$

$$= \infty$$

Essa integral imprópria *diverge*.

A Figura 16-13 mostra essas duas funções. A área sob $\frac{1}{x^2}$ de 1 até ∞ é a mesma que a área do quadrado 1 por 1 – a grosso modo, 1 centímetro ao quadrado. A área sob $\frac{1}{x}$ de 1 até ∞ é *muito, muito* maior – na verdade, é infinitamente maior do que quadrado grande o suficiente para cercar a galáxia da via láctea. Seus formatos são muito parecidos, mas suas áreas não poderiam ser mais diferentes.

Figura 16-13: A área sob $\frac{1}{x^2}$ de 1 até ∞ e a área sob $\frac{1}{x}$ de 1 até ∞.

A propósito, essas duas funções aparecem novamente no Capítulo 17 em séries infinitas. Decidir se uma série infinita converge ou diverge – uma característica distinta bastante parecida com a diferença entre essas duas funções – é um dos tópicos principais do Capítulo 17.

Quando ambos os limites da integração forem infinitos, você separa a integral em duas e transforma cada parte em um limite. Separar a integral em $x = 0$ é conveniente porque o zero é um número fácil de lidar, mas você pode dividir em qualquer lugar que você quiser. Zero talvez pareça uma boa escolha porque parece estar no meio entre -∞ e ∞. Mas isto é uma ilusão porque não há meio entre -∞ e ∞, ou você poderia dizer que qualquer ponto no eixo x é o meio.

Aqui está um exemplo: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

1. **Divida a integral em duas.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

2. **Transforme cada parte em um limite.**

$$= \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

3. Avalie cada parte e some os resultados.

$$= \lim_{c \to -\infty} [\text{arctg}(x)]_c^0 + \lim_{c \to -\infty} [\text{arctg}(x)]_0^c$$

$$= \lim_{c \to -\infty} (\text{arctg}(0) - \text{arctg}(c)) + \lim_{c \to \infty} (\text{arctg}(c) - \text{arctg}(0))$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \pi$$

Se qualquer "pedaço" da integral divergir, o todo diverge.

Fazendo soar a corneta de Gabriel

Esse problema da corneta talvez o impressione.

A *corneta de Gabriel* é o sólido gerado ao girar sobre o eixo x a região ilimitada entre $y = \frac{1}{x}$ e o eixo x (para $x \geq 1$). Veja a Figura 16-14.

Tocar esse instrumento apresenta desafios não insignificantes: 1) Não tem parte final para você colocar na boca; 2) Mesmo se tivesse, levaria muito tempo para chegar ao final; 3) Mesmo se você conseguisse chegar ao final e colocá-lo na sua boca, você não poderia soprar ar nenhum através dela porque o buraco é infinitamente pequeno; 4) Mesmo que você conseguisse assoprar a corneta, seria um tanto quanto inútil porque levaria muito tempo para o som sair. Existem dificuldades adicionais – peso infinito, não cabe no universo, e assim por diante – mas eu desconfio que você tenha entendido totalmente.

Acredite ou não, a corneta de Gabriel tem um volume finito, mas uma área de superfície *infinita*!

Você usa o método da panqueca para descobrir seu volume (veja o tópico da pilha de panquecas). Lembre-se que o volume de cada panqueca representativa é $\pi r^2 dx$. Para esse problema, o raio é $\frac{1}{x}$, então o pequeno pedaço do volume é $\pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$. Você encontra o volume total somando os pequenos pedaços entre 1 e ∞.

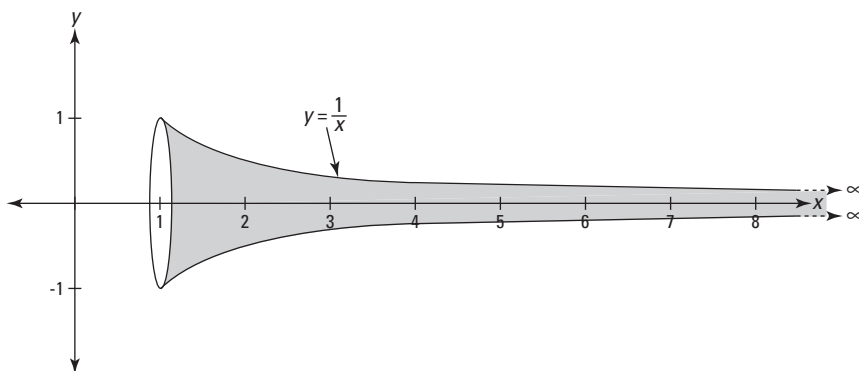



Figura 16-14: A corneta de Gabriel.

$$\text{Volume} = \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Eu calculei no tópico sobre integrais impróprias que $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = 1$, então o volume é $\pi \cdot 1$, ou apenas π.

Para determinar a área da superfície, primeiro você precisa da derivada da função (veja o tópico "Superfícies de revolução"):

$$y = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Agora insira tudo na fórmula da área da superfície:

$$\textit{Área da superfície} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\; dx$$
$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\; dx$$

Nós determinamos que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$, e pelo fato de $\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ ser sempre maior que $\frac{1}{x}$ no intervalo $[1, \infty)$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$ também deve ser igual a ∞. Finalmente, 2π vezes ∞ continua sendo ∞, é claro, então a área da superfície é infinita.

Pergunta bônus para aqueles com propensão filosófica: Supondo que Gabriel seja onipotente, poderia ele superar as dificuldades mencionadas acima e assoprar sua corneta? *Dica*: Todo o cálculo do mundo não vai lhe ajudar com essa aqui.

Capítulo 17

Série Infinita

Neste Capítulo

- Continuando da sequência para a série
- Uma série infinita – o atrasado devido à chuva não vai ter fim
- Ficando musical com a série harmônica
- Dando uma boa olhada na série telescópica
- Testando em busca de convergência
- Torcendo pelo teste da raiz
- Analisando série alternativa

Assim como quase que completamente com todos os tópicos, o assunto desse capítulo envolve a idéia do infinito – especificamente, séries que continuam para o infinito. Uma série infinita é a soma de uma lista sem fim de números como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$. Pela lista não ter fim, não é surpreendente que esse tipo de soma possa ser infinita. O que é incrível é que algumas séries infinitas somam um número *finito*. Esse capítulo abrange dez testes para decidir se a soma de uma série é finita ou infinita.

O que você faz nesse capítulo é muito fantástico quando você pensa sobre isso. Considere as séries 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ... Se você se distanciar o suficiente, você vai encontrar um número que tem tantos zeros à direita do ponto decimal que mesmo que cada zero fosse tão pequeno quanto um próton, não haveria espaço suficiente em todo o universo apenas para escrevê-lo! Por nosso universo ser tão vasto, qualquer coisa nele – digamos o número de partículas elementares – é uma gota d'água no oceano perto das coisas que você vê nesse capítulo. Na verdade, nem mesmo uma gota d'água no oceano, porque perto do infinito, qualquer coisa finita soma *nada*. Você já deve ter provavelmente ouvido Carl Sagan se emocionar com os "bilhões e bilhões e bilhões" de estrelas na nossa galáxia. "bilhões e bilhões" – *pffffftt*.

Sequência e Série: O que Elas São

Aqui está uma *sequência*: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Transforme as vírgulas em sinais de adição e você tem uma *série*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Muito simples, hein? Investigar as séries é o que esse capítulo vai fazer, mas eu preciso discutir brevemente a sequência para criar a base para série.

Amarrando as sequências

Uma *sequência* é simplesmente uma lista de números. Uma *sequência infinita* é uma lista de números *sem fim*. Esse é o único tipo que nos interessa, e toda vez que o temo *sequência* (ou *série*) é usado sozinho, ele significa uma sequência infinita (ou série infinita).

Aqui está a forma geral para a sequência:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n,$$

onde n vai de 1 (geralmente) até o infinito (algumas vezes n começa no zero ou outro número). O quarto *termo* da seqüência, por exemplo, é a_4 (lê-se "a índice 4"); o n-ésimo termo é a_n (lê-se "a índice n"). A coisa com a qual nós nos preocupamos é o que acontece com uma seqüência infinitamente distante à direita, ou como os matemáticos dizem, "no limite". Uma notação abreviada para essa sequência é $\{a_n\}$.

Bem lá atrás, na introdução, eu discuti a seguinte sequência. É definida pela fórmula $a_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

O que acontece com essa sequência no limite é óbvio. Cada termo fica cada vez menor, certo? E se você se distanciar o suficiente, você pode encontrar um termo tão perto do zero como você quer, certo? Então,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Lembre dos Capítulos 7 e 8 como interpretar esse limite. À medida que n se aproxima do infinito (mas nunca chega lá), a_n fica cada vez mais perto de zero.

Convergência e divergência de sequências

Devido ao fato de o limite da sequência anterior ser um número *finito*, você diz que a sequência *converge*.

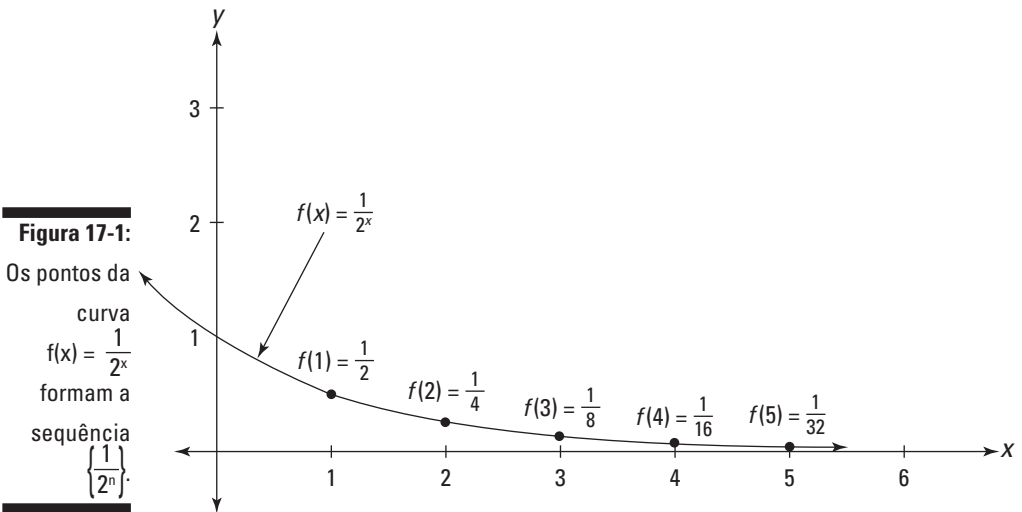
Convergência e divergência de uma sequência: Para qualquer sequência $\{a_n\}$, se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, onde L é um número real, então a sequência *converge* para L. Caso contrário, a sequência *diverge*.

As sequências que convergem, de certa forma, se estabilizam em um número em particular – mais ou menos alguma quantia minúscula – depois que você se distancia o suficiente à direita. As sequências que divergem nunca se estabilizam. Ao contrário, as sequências divergentes podem...

- Aumentar para sempre, nesse caso $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Diz-se que esse tipo de sequência "explode". Uma sequência também pode ser igual ao infinito negativo no limite.
- Oscilar (ir para cima e para baixo) como a sequência 1, –1, 1, –1, 1, –1 …
- Não exibir padrão nenhum – isso é raro

Sequências e funções andam de mãos dadas

A sequência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ pode ser pensada como um conjunto infinito de pontos descontínuos (*descontínuo* é uma palavra matemática sofisticada para *separado*) ao longo da função contínua $f(x) = \frac{1}{2^x}$. A Figura 17-1 mostra a curva $f(x) = \frac{1}{2^x}$ e os pontos na curva que marcam a sequência.

Figura 17-1: Os pontos da curva $f(x) = \frac{1}{2^x}$ formam a sequência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.

A sequência é formada pelos outputs (os valores de y) da função onde os inputs (os valores de x) são inteiros positivos (1, 2, 3, 4,...).

A sequência e a função relacionada andam de mãos dadas. Se o limite da função, à medida que x se aproxima do infinito, é algum número finito, L, então o limite da sequência também é L, e assim, a sequência converge para L. Também o gráfico desse tipo de par de funções convergente/sequência tem uma assíntota horizontal em L; o gráfico na Figura 17-1 tem uma assíntota com a equação $y = 0$.

Determinando limites com a regra de L'Hôpital

Lembra-se da regra de L'Hôpital do Capítulo 16? Você vai usá-la agora para encontrar os limites da sequência. A seqüência $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ converge ou diverge? Inserindo 1, depois 2, depois 3, e assim sucessivamente, em $\frac{n^2}{2^n}$, você gera alguns primeiros termos da sequência:

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \frac{64}{256}, \ldots$$

O que você acha? Depois de subir por alguns termos, a sequência desce e parece que vai continuar descendo – parece que ela vai convergir para zero. A regra de L'Hôpital prova isso. Você usa a regra para determinar o limite da função $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, que anda de mãos dadas com a sequência $\frac{n^2}{2^n}$.

Para usar a regra de L'Hôpital, pegue a derivada do numerador e a derivada do denominador.

Para esse problema, você tem que usar a regra de L'Hôpital duas vezes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2^x \ln 2 \ln 2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Pelo fato de o limite da função ser 0, e também o limite da sequência, e assim a sequência $\frac{n^2}{2^n}$ converge para zero.

Somando séries

Uma *série infinita* (ou apenas *série* em resumo) é simplesmente a soma de um número infinito de termos de uma sequência. Aqui está a sequência do tópico anterior de novo, $a_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots.$$

E aqui está a *série* associada com essa *sequência*:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.$$

Você pode usar uma notação sofisticada, usando o sigma para escrever essa soma em uma forma mais compacta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

O símbolo de somatória diz para você inserir 1 no lugar de *n*, depois 2, depois 3, e assim sucessivamente, e depois somar todos os termos (mais sobre notação sigma no Capítulo 13). Um procurador de defeitos pode observar que você, na verdade, não pode somar um número infinito de termos. Ok. Então aqui está o detalhe para os procuradores de defeitos. Uma soma infinita é tecnicamente um limite. Em outras palavras,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{b\to\infty}\sum_{n=1}^{b}\frac{1}{2^n}$$

Para encontrar a soma infinita, você pega o limite – do mesmo jeito que você faz para as integrais (veja o Capítulo 16) impróprias (indefinidas). Daqui em diante, de qualquer forma, eu só escrevo somas infinitas como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ e abro mão da bobagem do limite.

Somas parciais

Continuando com a mesma série, dê uma olhada em como a soma cresce listando a "soma" de um termo (tipo o som de uma mão aplaudindo), a soma de dois termos, três termos, quatro, e assim sucessivamente:

$$S_1=\frac{1}{2}$$
$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$
$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$
$$\vdots$$
$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+....+\frac{1}{2^n}$$

Cada uma dessas somas é chamada de *soma parcial* da série.

Soma parcial: A *n-ésima soma parcial*, S_n, de uma série infinita é a soma dos primeiros *n* termos da série.

A convergência e a divergência de uma série – o evento principal

Se você listar agora as somas parciais anteriores, você tem a seguinte *seqüência* de somas parciais:

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\ldots$$

O ponto principal desse capítulo é descobrir se esse tipo de sequência de somas parciais *converge* – se move em direção a um número finito – ou *diverge*. Se a sequência de somas parciais convergir, você diz que a série converge; caso contrário, a sequência de somas parciais diverge e você diz que a série diverge. O resto desse capítulo é dedicado às muitas técnicas usadas para fazer essa determinação.

A propósito, se você estiver um pouco confuso pelos termos *sequência* e *série* e a conexão entre eles, você não está sozinho. Manter as idéias certas não é fácil. Para começar, note que existem duas sequências associadas com toda e qualquer série. Com a série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ ..., por exemplo, você tem a sequência subjacente, $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$ ..., e também a sequência de somas parciais, $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16}$ ... Não é uma má ideia tentar manter essas coisas corretas, mas tudo que você realmente precisa se preocupar é se as *séries* somam um número finito ou não. Se ela somar, ela *converge*; se não, ela *diverge*. A razão para entrar na noção um tanto quanto confusa de uma *sequência* de somas parciais é que as definições de convergência e divergência são baseadas no comportamento da sequência, e não da série. Mas – eu espero que seja óbvio – as idéias são mais importantes do que a terminologia, e de novo, a *ideia* importante que você precisa observar é se a série soma ou não um número finito.

E a série anterior? Ela converge ou diverge? Não precisaria ter muita imaginação para ver o padrão a seguir:

$$S_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$
$$S_2=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$$
$$S_3=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}$$
$$S_4=\frac{15}{16}=1-\frac{1}{16}$$
$$\vdots$$
$$S_n=1-\frac{1}{2^n}$$

Encontrar o limite dessa sequência de somas parciais é óbvio:

$$\lim_{n\to\infty} Sn=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

Então, essa série converge para 1. Em símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

A propósito, isso talvez faça você se lembrar do paradoxo sobre andar em direção a uma parede, onde seu primeiro passo é metade da distância da parede, seu segundo passo é metade da distância restante, seu terceiro passo é metade da distância restante, e assim sucessivamente. Você vai conseguir chegar à parede? Resposta: Depende. Mais sobre isso depois.

Convergência ou Divergência? Essa é a Questão

Esse tópico contém nove maneiras de determinar se uma série converge ou diverge. No próximo tópico sobre *séries alternadas*, eu olho a décima maneira, e depois eu resumo todas as dez no tópico final.

Um teste de divergência óbvio: o teste do *n*-ésimo termo

Se os termos individuais de uma série (em outras palavras, os termos da sequência adjacente da série) não convergirem para zero, então a série deve divergir. Esse é o teste do *n*-ésimo termo para divergência.

O teste do *n*-ésimo termo: Se $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, então $\sum a_n$ diverge (Eu suponho que você descobriu isso com esse símbolo de somatória sem nada, n vai do 1 até o infinito).

Se você pensar bem, é apenas bom senso. Quando uma série converge, a soma se concentra em certo número. A única maneira que isso pode acontecer é quando os números que estão sendo adicionados estão ficando infinitesimalmente menores – como na série sobre a qual eu venho falando: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Imagine, em vez disso, que os termos de uma série estejam convergindo, digamos, para 1, como na série $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \ldots$, gerada pela fórmula $a_n = \frac{n}{n+1}$. Nesse caso, quando você soma os termos, você está somando números extremamente perto de 1 repetidas vezes para sempre – e isso deve somar ao infinito. Então, para que uma série seja convergente, os termos da série devem convergir para zero. Mas tenha certeza que você entendeu o que o teste do *n*-ésimo termo *não* diz.

Quando os termos de uma série convergem para zero, isso *não* garante que a série converge. Na linguagem lógico-matematicalesa – o fato de que os termos de uma série convergem para zero é uma condição *necessária*, mas *não suficiente* para concluir que a série converge para uma soma finita.

Pelo fato de esse teste ser geralmente muito fácil de aplicar, deveria ser uma das primeiras coisas que você verifica ao tentar determinar se uma série converge ou diverge. Por exemplo, se lhe pedem para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge ou diverge, note que cada termo dessa série é um número maior do que 1 sendo elevado a uma potência positiva. Isso sempre resulta em um número maior do que 1 e, assim, os termos dessa série não convergem para zero, e a série deve então divergir.

O teste do *n*-ésimo termo não funciona apenas para série positiva comum como as desse tópico, mas ele também funciona para séries com termos positivos e negativos (Mais sobre isso no final deste capítulo no tópico sobre "Séries Alternadas").

Três séries básicas e seus testes de convergência/divergência

Séries geométricas e as chamadas séries-*p* são relativamente simples, porém são séries importantes que você pode usar como referência ao determinar a convergência ou divergência de séries mais complicadas. Séries telescópicas não aparecem muito, mas muitos livros de cálculo as descrevem. Então quem sou eu para me opor à tradição?

Série geométrica

Uma série geométrica é uma série na forma:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

O primeiro termo, a, é chamado de *primeiro termo*. Cada termo depois do primeiro é igual ao termo antecedente multiplicado por r, que é a *razão*. Por exemplo, se a for 5 e r for 3, você tem

$$\begin{aligned} & 5 + 5 \,.\, 3 + 5 \,.\, 3^2 + 5 \,.\, 3^3 + \ldots \\ = \; & 5 + 15 + 45 + 135 + \ldots \end{aligned}$$

Você apenas multiplica cada termo por 3 para obter o próximo termo. A propósito, o 3 nesse exemplo é chamado de *razão* porque a razão de qualquer termo *dividido* pelo seu termo antecessor é igual a 3, mas eu acho que faz muito mais sentido pensar no 3 como o seu *multiplicador*.

Se a for 100 e r for 0.1, então você tem

$$100 + 100 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}1^2 + 100 \cdot 0{,}1^3 + 100 \cdot 0{,}1^4 + \ldots$$
$$= 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots$$

Se isso te faz lembrar de alguma coisa, você tem uma boa memória. É a série para o paradoxo de Aquiles versus a tartaruga (volte até o Capítulo 2).

E se a for ½ e r também for ½, você tem a série que eu tanto venho falando:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.$$

A regra da convergência/divergência para série geométrica é muito fácil.

Regra da série geométrica: Se $0 < |r| < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge para $\frac{a}{1-r}$. Se $|r| \geq 1$, a série diverge (Note que essa regra funciona quando $-1 < r < 0$, neste caso você obtém uma ***série alternada***; mais sobre isso no final desse capítulo).

No primeiro exemplo, $a = 5$ e $r = 3$, então a série diverge. No segundo exemplo, a é 100 e r é 0.1, então a série converge para $\frac{100}{1-0{,}1} = \frac{100}{0{,}9} = 111^1/_9$. Essa é a resposta para o problema de Aquiles versus a tartaruga: Aquiles ultrapassa a tartaruga depois de correr $100^1/_9$ metros. E no terceiro exemplo, $a = ½$ e $r = ½$, então a série converge para $\frac{½}{1-½} = 1$. Essa é a distância que você anda se você começar a 1 jarda da parede, depois dê uma passo e fique a meia distância da parede, depois metade da distância restante, e assim sucessivamente. Você dá um número infinito de passos, mas viaja uma mera jarda. E quanto tempo vai levar para chegar à parede? Bem, se você mantiver uma velocidade constante e não pausar entre os passos (o que, é claro, é impossível), você vai chegar lá no mesmo tempo que você levaria para andar toda uma jarda. Se você pausar entre os passos, mesmo que por um bilionésimo de segundo, você *nunca* vai chegar à parede.

Série-p

Uma série-p é da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^p} + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

(onde p é uma potência positiva). A série-p para $p = 1$ é chamada de série *harmônica*. Aqui está ela:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots.$$

Embora isso cresça *muito* devagar – depois de 10.000 termos, a soma é somente, mais ou menos, 9,79! – a série harmônica de fato diverge para o infinito.

A propósito, isso é chamado de série *harmônica* porque os números na série têm algo a ver com a maneira que uma corda musical, como a corda de um violão, vibra – não pergunte. Para entusiastas da história, no século 6 a.C., Pitágoras investigou a série harmônica e sua conexão com as notas musicais de uma lira.

Aqui está a regra da convergência/divergência para a série-*p*:

Regra da série-*p*: A série-*p* $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^p}$ converge se P > 1 e diverge se P ≤ 1.

Como você pode ver a partir dessa regra, a série harmônica forma a linha divisória da convergência/divergência para a série-*p*. Qualquer série-*p* com termos *maiores* do que os termos da série harmônica *diverge*; e qualquer série-*p* com termos *menores* do que os termos da série harmônica, *converge*.

A série-*p* para $p = 2$ é outra série comum:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$
$$= 1\ \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

A regra da série-*p* diz a você que essa série converge. Isso pode ser mostrado – embora seja além do objetivo desse livro – que a soma converge para $\frac{\pi^2}{6}$. Mas, ao contrário da regra da série geométrica, a regra da série-*p* apenas diz a você se uma série converge ou não, e não para qual número ela converge.

Série telescópica

Você não vê muitas séries telescópicas, mas a regra da série telescópica é boa para ter na sua bolsa de truques – você nunca sabe quando ela vai ser útil. Considere a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

Para ver que essa série é uma série telescópica, você tem que usar a técnica das frações parciais do Capítulo15 – desculpe ter que trazer isso à tona de novo – para reescrever $\frac{1}{n(n+1)}$ como $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Agora você tem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Você vê como todos esses termos vão agora colapsar ou *encurtar*? Os $^1/_2$ se cancelam, os $^1/_3$ se cancelam, os $^1/_4$ se cancelam, e assim sucessivamente. Tudo o que resta é o primeiro termo, 1 (na verdade, é apenas metade de um termo), e o "último" meio-termo, $\frac{1}{n+1}$. Então a soma é simplesmente

$1 - \frac{1}{n+1}$. No limite, à medida que n se aproxima do infinito, $\frac{1}{n+1}$ converge para zero, e assim a soma converge para 1 – 0, ou 1.

Cada termo em uma série telescópica pode ser escrito como a diferença de dois meios-termos – chame-os de termos h. A série telescópica pode então ser escrita como:

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_4) + (h_4 - h_5) + \ldots + (h_n - h_{n+1})$$

Eu aposto que você está doido por outra regra, então aqui está a próxima.

Regra da série telescópica: Uma série telescópica da forma acima converge se h_{n+1} converge para um número finito. Nesse caso, a série converge para $h_1 - \lim_{n \to \infty} h_{n+1}$. Se h_{n+1} diverge, a série diverge.

Note que essa regra, como a regra para a série geométrica, permite que você determine qual número uma série telescópica convergente converge. Essas são as únicas duas regras que eu falo que você pode fazer isso. As outras regras para determinar a convergência ou divergência não permitem que você determine para onde uma série convergente converge. Mas, ei, você sabe o que eles dizem, "dois dentre dez não é tão ruim".

Três testes de comparação para convergência/divergência

Digamos que você esteja tentando descobrir se uma série converge ou diverge, mas ela não se encaixa em nenhum dos testes que você conhece. Não se preocupe. Você encontra uma série padrão que você sabe que converge ou diverge e depois compara a sua nova série com o padrão conhecido. Para os três testes a seguir, se o padrão convergir, sua série converge; e se o padrão divergir, sua série diverge.

O teste da comparação direta

Essa é uma regra simples e de bom senso. Se você tem uma série que é *menor* que uma série padrão convergente, então a sua série também deve convergir. E se sua série for *maior* que a série padrão divergente, então a sua série também deve divergir. Aqui está a bobagem.

Teste da comparação direta: Deixe que $0 \geq a_n \geq b_n$ para todo n.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

O que você acha de um exemplo? Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+3^n}$ converge ou diverge. Muito fácil. Essa série lembra a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, que é uma série com *r* igual a $1/3$ (Note que você pode reescrever isso na forma padrão da série geométrica como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Porque $0 < |r| < 1$, essa série converge. E porque $\frac{1}{5+3^n}$ é *menor* do que $\frac{1}{3^n}$ para todos os valores de *n*, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+3^n}$ também deve convergir.

Aqui está outro exemplo: O $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge? Essa série lembra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a série-*p* harmônica que é conhecida por divergir. Porque $\frac{\ln n}{n}$ é *maior* que $\frac{1}{n}$ para todos os valores de $n \geq 3$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ também deve divergir. A propósito, se você estiver pensando porque eu posso considerar apenas os termos onde $n \geq 3$, aqui está o porquê:

Para qualquer um dos testes de convergência/divergência, você pode desconsiderar ***qualquer*** número de termos no começo de uma série. E se você estiver comparando duas séries, você pode ignorar qualquer número de termos do começo de qualquer uma ou de ambas as séries – e você pode ignorar um número diferente de termos em cada uma das duas séries.

Essa total desconsideração de termos iniciantes inocentes é permitida porque os primeiros, digamos, 10 ou 1000 ou 1.000.000 termos de uma série sempre somam um número finito e assim nunca tem qualquer efeito em se uma série converge ou diverge. Note, no entanto, que desconsiderando um número de termos *afetaria* o total para o qual uma série convergente converge.

O teste da comparação direta diz a você *nada* se uma série que você esteja investigando for *maior* que uma série *convergente* conhecida ou *menor* que uma série *divergente* conhecida.

Por exemplo, digamos que você queira determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10+\sqrt{n}}$ converge. Essa série lembra a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é uma série-*p* com *p* igual a $1/2$. O teste da série-*p* diz que essa série diverge, mas isso não te ajuda porque sua série é *menor* do que esse padrão divergente conhecido.

Em vez disso, você deve comparar sua série com a série harmônica divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sua série, $\frac{1}{10+\sqrt{n}}$, é maior do que $\frac{1}{n}$ para todo $n \geq 14$ (dá um pouco de trabalho demonstrar isso; tente). Porque a sua série é *maior* do que a série harmônica *divergente*, sua série também deve divergir.

O teste da comparação do limite

A ideia por trás desse teste é que se você pegar uma série convergente conhecida e multiplicar cada um dos seus termos por algum número,

então essa série também converge. E não importa se esse multiplicador é, digamos, 110, ou 10.000, ou $1/_{10.000}$ porque qualquer número, grande ou pequeno, vezes a soma finita da série original ainda é um número finito. A mesma coisa vale para uma série divergente multiplicada por qualquer número. Essa nova série também diverge porque qualquer número, grande ou pequeno, vezes o infinito ainda é igual ao infinito. Isso é muito simplificado – é somente no limite que a série é tipo um múltiplo da outra – mas isso transmite o princípio básico.

Você pode descobrir se esse tipo de conexão existe entre duas séries olhando para a relação entre os *n*-ésimos termos das duas séries à medida que *n* se aproxima do infinito. Aqui está o teste.

Teste da comparação do limite: Para duas séries, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ se $a_n > 0, b_n > 0$, e $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$, onde L é *finito* e *positivo*, então ou as duas séries convergem ou as duas divergem.

Esse é um bom teste para usar quando você não pode usar o teste da comparação direta para sua série porque vai para o lugar errado – em outras palavras, sua série é *maior* que uma série *convergente* conhecida ou *menor* que uma série *divergente* conhecida.

Aqui está um exemplo: A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ converge ou diverge? Essa série lembra a série-*p* convergente, $\frac{1}{n^2}$, então esse é o seu padrão. Mas você não pode usar o teste da comparação direta porque os termos da sua série são *maiores* do que $\frac{1}{n^2}$. Em vez disso, você usa o teste da comparação do limite.

Pegue o limite da relação dos *n*-ésimos termos das duas séries. Não importa quais séries você coloca no numerador e no denominador, mas colocando a conhecida série padrão no denominador faz com que esses tipos de problemas fiquem mais fáceis de fazer e de adivinhar os resultados.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - \ln n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 - \ln n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{2n - \frac{1}{n}} \quad \text{(Regra de L'Hôpital)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{n^2}} \quad \text{(Regra de L'Hôpital de novo)}$$

$$= \frac{2}{2 + \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{2}{2 + 0}$$

$$= 1$$

Porque o limite é finito e positivo e porque a série padrão converge, sua série também deve convergir.

Assim, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ converge.

O teste da comparação do limite é um bom teste para séries onde o termo geral é uma função *racional*; em outras palavras, onde o termo geral é o quociente de dois polinômios.

Por exemplo, determine a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - n + 1}{n^3 + 4n + 3}$.

1. **Determine a série padrão.**

   Pegue a maior potência de n no numerador e no denominador – ignorando qualquer coeficiente e todos os outros termos – e simplifique. Dessa forma: [1]

   $$\frac{5\textcircled{n^2} - n + 1}{\textcircled{n^3} + 4n + 3} \to \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

   Essa é a série padrão, $\frac{1}{n}$, a série harmônica divergente.

2. **Pegue o limite da relação entre os *n*-ésimos termos das duas séries.**

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{5n^2 - n + 1}{n^3 + 4n + 3}}{\frac{1}{n}}$$
   $$= \lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 - n^2 + n}{n^3 + 4n + 3}$$
   $$= \lim_{n \to \infty} \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \quad \text{(dividindo o numerador e o denominador por } n^3\text{)}$$
   $$= \frac{5 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty} + \frac{3}{\infty}}$$
   $$= \frac{5 - 0 + 0}{1 + 0 + 0}$$
   $$= 5$$

3. **Porque o limite do passo 2 é finito e positivo e porque a série padrão diverge, sua série também deve divergir.**

   Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - n + 1}{n^3 + 4n + 3}$ diverge.

O teste da comparação do limite é sempre expresso como aparece no começo dessa seção, mas eu quero mostrar – ignorando de forma imprudente a nobre tradição dos autores de livros de cálculo – que é, de certa forma, incompleto. O limite, L, não precisa ser finito e positivo para o teste funcionar.

Primeiro, se a série padrão é convergente, e você a coloca no denominador do limite, e o limite é *zero*, então a sua série também deve convergir. Note que se o limite é infinito, você não pode concluir nada. E segundo, se a série padrão é divergente, e você a coloca no denominador, e o limite é *infinito*, então sua série também deve divergir. Se o limite é zero, você não aprende nada.

O teste da comparação da integral

O terceiro teste padrão envolve a comparação de séries que você está investigando em relação a sua integral imprópria familiar (veja o Capítulo 16 para mais sobre integral imprópria). Se a integral converge, sua série converge; e se a integral diverge, assim faz a sua série. A propósito, no meu conhecimento, ninguém mais chama isso de teste da comparação da integral – mas deveriam, pois é dessa maneira que funciona.

Aqui está um exemplo. Determine a convergência e a divergência de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. O teste da comparação direta não funciona porque a série é *menor* que a série harmônica *divergente*, $\frac{1}{n}$. Tentar o teste da comparação do limite é a próxima escolha natural, mas também não funciona – tente. Mas se você notar que a série é uma expressão que você sabe como integrar, você terminou (você notou, não foi?). Apenas calcule a integral imprópria familiar com os mesmos limites de integração como os números-índice do somatório – assim:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln n}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{\ln 2}^{b} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{u}\, dx$$ (substituição com $u = \ln x$ e $du = \frac{1}{x}dx$; quando $x = 2$, $u = \ln 2$, e quando $x = b$, $u = \ln b$)

$$= \lim_{b \to \infty} [\ln u]_{\ln 2}^{\ln b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right)$$

$$= \ln(\ln \infty) - \ln(\ln 2)$$

$$= \infty - \ln(\ln 2)$$

$$= \infty$$

Porque a integral diverge, a série diverge.

Depois que você tiver determinado a convergência ou divergência de uma série com o teste da comparação da integral, você pode então usar essa série com um referência para investigar outras séries com o teste da comparação direta ou com o teste da comparação do limite.

Por exemplo, o teste da integral acabou de dizer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. Agora você pode usar essa série para investigar $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n - \sqrt{n}}$ com o teste da comparação direta. Você vê o porquê? Ou você pode investigar, digamos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n - \sqrt{n}}$ com o teste da comparação do limite. Tente.

O teste da comparação da integral é razoavelmente fácil de usar, então não esqueça de se perguntar se você pode integrar a expressão da série ou qualquer coisa parecida com ela. Se puder, BINGO.

A propósito, no Capítulo 16, você vê as duas integrais impróprias a seguir: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$, que diverge e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$, que converge. Dê uma olhada de novo na Figura 16-13. Agora que você sabe o teste da comparação da integral, você pode apreciar a conexão entre essas integrais e suas séries-p familiares: a série harmônica divergente, $\frac{1}{n}$, e a série-p convergente, $\frac{1}{n^2}$.

Aqui está a bobagem para o teste da comparação da integral. Note o detalhe.

Teste da comparação da integral: Se $f(x)$ for positivo, contínuo, e descrente para todo $x \geq 1$ e se $a_n = f(n)$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ou ambos convergem ou ambos divergem.

Os dois testes do "R": Razão e raízes

Ao contrário dos três testes referenciais dos tópicos anteriores, o teste da razão e da raiz não comparam uma nova série a um padrão conhecido. Elas funcionam olhando apenas para a natureza da série que você está tentando descobrir. Elas formam um par coeso porque os resultados de ambos os testes dizem a você a mesma coisa. Se sua resposta for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1, a série diverge; e se for exatamente 1, você não aprende nada e deve tentar um teste diferente.

O teste da razão

O teste da razão olha para a razão de um termo de uma série com o seu termo anterior imediato. Se, no limite, essa razão for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1 (isso inclui o infinito), a série diverge; se for igual a 1, o teste é inconclusivo.

O teste da razão funciona especialmente bem com as séries envolvendo *fatoriais* como $n!$ ou onde n estiver na potência como 3^n.

O símbolo *fatorial*, !, diz a você para multiplicar dessa maneira:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. E note como as coisas cancelam quando você

tem fatoriais no numerador e no denominador de uma fração: $\frac{6!}{5!} =$

$\frac{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6$ e $\frac{5!}{6!} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{1}{6}$. Em ambos os casos, tudo

cancela menos o 6. Da mesma maneira, $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$ e $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$;

tudo cancela menos o $(n + 1)$. Por fim, parece estranho, mas $0! = 1$ – apenas

acredite no que eu digo.

Tente esse aqui: A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge ou diverge? Aqui está o que você vai fazer. Olhe para o limite da razão do termo $(n + 1)$ com o n-ésimo termo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{3^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1}$$

$$= \frac{3}{\infty + 1}$$

$$= 0$$

Porque o limite é menor do que 1, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

Aqui está outra série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Qual é o seu palpite – ela converge ou diverge? Olhe o limite da razão:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ é um dos limites para decorar, como discutido no Capítulo 8}\right)$$
$$\approx 2{,}718$$

Porque o limite é maior do que 1, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ diverge.

O teste da raiz

Como o teste da razão, o teste da raiz olha para um limite. Dessa vez você investiga o limite da raiz *n*-ésima do *n*-ésimo termo da sua série. O resultado diz a você a mesma coisa que os resultados do teste da razão: Se o limite for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1 (incluindo o infinito), a série diverge; e se o limite for igual a 1, você não aprende nada.

O teste da raiz é um bom teste de se tentar se a série envolve potências *n*-ésimas.

Tente esse aqui: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$ converge ou diverge? Aqui está o que você tem de fazer:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n}$$
$$= \frac{e^2}{\infty}$$
$$= 0$$

Porque o limite é menor do que 1, a série converge. A propósito, você também pode fazer essa série com o teste da razão, mas é mais difícil – acredite no que eu digo.

Algumas vezes é útil dar um palpite instruído sobre a convergência ou divergência de uma série antes que você comece um ou mais testes de convergência/divergência. Aqui está uma dica que ajuda com algumas séries. As expressões a seguir estão listadas da "menor" para a "maior": n^{10}, 10^n, $n!$, n^n (O 10 é um número arbitrário; o tamanho do número não afeta essa ordem). Uma série com uma expressão "menor" sobre uma expressão "maior"

converge, por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{50}}{n!}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; e uma série com uma expressão "maior" sobre uma "menor" diverge, por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{100^n}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n}{n^{100}}$.

Série Alternada

Nos tópicos anteriores, você estava considerando séries com termos *positivos*. Agora você vai considerar as *séries alternadas* – séries onde os termos alternam entre positivos e negativos – dessa forma:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\ldots$$

Encontrando a convergência absoluta versus a condicional

Muitas séries divergentes com termos positivos convergem se você mudar o sinal dos seus termos para que eles alternem entre positivos e negativos. Por exemplo, você sabe que a série harmônica diverge:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

Mas, se você mudar um ou outro sinal para o negativo, você obtém a *série harmônica alternada*, que *converge*:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

A propósito, ainda que eu não vá mostrar a você como calcular isso, essa série converge para ln 2, que é igual a mais ou menos 0,6931.

Uma série alternada é dita ser *condicionalmente convergente* se for convergente como está, mas se tornaria divergente se todos os seus termos se tornassem positivos.

Uma série alternada é dita ser *absolutamente convergente* se ela for convergente mesmo que todos os seus termos se tornassem positivos. E qualquer série convergente absoluta é também automaticamente convergente como está.

Aqui está um exemplo. Determine a convergência ou divergência da seguinte série alternada:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ \ldots$$

Se todos esses termos fossem positivos, você teria a série geométrica familiar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ ...$$

que, pela regra da série geométrica, converge para 2. Porque a série positiva converge, a série alternada também deve convergir e você diz que a série alternada é ***absolutamente convergente***.

O fato de que a convergência absoluta implica em uma convergência simples é apenas bom senso se você pensar bem. A série geométrica anterior tem termos positivos e converge para 2. Se você tornasse todos os termos negativos, eles somariam -2, certo? Então, se alguns dos termos forem positivos e outros negativos, a série deve convergir para algo entre –2 e 2.

Você notou que a série alternada acima é uma série geométrica do jeito que está com $r = -\frac{1}{2}$? (Lembre que a regra da série geométrica funciona para séries alternadas, assim como para série positiva). A regra dá a sua soma: $\frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.

O teste da série alternada

Teste da série alternada: Uma série alternada converge se duas condições forem satisfeitas:

1. O seu *n*-ésimo termo convergir para zero.
2. Seus termos serem não-crescentes – em outras palavras, cada termo é ou menor do que ou maior do que seu antecessor (ignorando o sinal de menos).

Usando esse teste simples, você pode facilmente descobrir que muitas séries alternadas convergem. Os termos têm que apenas convergir para zero e ficarem cada vez menores (eles raramente ficam os mesmos). A série harmônica alternada converge pelo teste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\mathrm{n}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

Assim como as duas séries a seguir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + ...$$

O teste da série alternada pode apenas dizer que uma série alternada converge para ela mesma. O teste não diz nada sobre a série com termos positivos. Em outras palavras, o teste não pode dizer se uma série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente. Para responder a essa pergunta, você deve investigar a série positiva com um teste diferente.

Agora tente alguns problemas. Determine a convergência ou divergência das seguintes séries. Se forem convergentes, determine se a convergência é condicional ou absoluta.

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$$

1. **Verifique que o *n*-ésimo termo converge para zero.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} \qquad \text{(pela Regra de L'Hôpital)}$$
$$=0$$

Sempre verifique o n-ésimo termo primeiro porque se ele não convergir para zero, você já vai ter terminado – a série alternada *e* a série positiva vão ambas divergir. Note que o teste de divergência do *n*-ésimo termo (veja o tópico sobre o teste do *n*-ésimo termo) se aplica às séries alternadas assim como às séries positivas.

2. **Verifique se os termos decrescem ou permanecem os mesmos (ignorando os sinais de menos).**

   Para mostrar que $\frac{\ln n}{n}$ decresce, pegue a derivada da função $f(x) = \frac{\ln n}{n}$. Lembra-se da diferenciação? Eu sei que já faz um tempinho.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2} \qquad \text{(Regra do quociente)}$$
$$=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

   Isso é negativo para todo $x \geq 3$ (porque o log natural de qualquer coisa 3 ou maior é maior do que 1 e x^2, é claro, é sempre positivo), então a derivada e assim a inclinação da função são negativas, e então a função é decrescente. Finalmente, porque a função é decrescente, os termos da série também são decrescentes. É o suficiente: $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ converge pelo teste da série alternada.

3. Determine o tipo de convergência.

Você pode ver que para $n \geq 3$ a série positiva, $\frac{\ln n}{n}$, é maior do que a série harmônica divergente, $\frac{1}{n}$, então a série positiva diverge pelo teste da comparação direta. Assim, a série alternada é *condicionalmente* convergente.

Se a séria alternada falha em satisfazer a segunda exigência do teste da série alternada, isso não *diz* que sua série diverge, apenas que esse teste falha em demonstrar a convergência.

Você está ficando muito bom nisso. O que acha de outro problema? Teste a convergência de $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^3}$. Porque a série positiva $\frac{\ln n}{n^3}$ lembra a série-*p* convergente, $\frac{1}{n^3}$, você aposta que ela converge.

Se você acha que pode mostrar que a série *positiva* converge ou diverge, você talvez queira tentar antes de usar o teste da série alternada, porque...

- Você talvez tenha que fazer depois de qualquer jeito para determinar o tipo de convergência, e
- Se você puder mostrar que a série positiva *converge*, você termina o problema em um passo, e você teria mostrado que a série alternada é *absolutamente* convergente.

Então tente mostrar a convergência da série positiva $\frac{\ln n}{n^3}$. O teste da comparação do limite parece apropriado aqui, e $\frac{1}{n^3}$ é a escolha natural para essa série padrão, mas com esse padrão, o teste falha – tente. Quando isso acontece, você pode algumas vezes terminar o problema tentando uma série convergente maior. Então tente o teste da comparação do limite com a série-*p* convergente, $\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$= 0$ (Nós acabamos de fazer isso acima com a Regra de L'Hôspital)

Porque o limite é zero, a série positiva $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ converge (veja o tópico sobre "O teste da comparação do limite"); e porque a série positiva converge, a série alternada dada também converge. Assim, $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^3}$ é ***absolutamente*** convergente.

Um último problema e eu deixo você ir pra casa. Teste a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \ldots$. Esse é muito fácil.

O n-ésimo termo dessa série converge para 1 (é a regra óbvia de L'Hôpital), então você já terminou. Porque o n-ésimo termo não converge para zero, a série diverge pelo teste do n-ésimo termo.

Mantendo Todos os Testes Corretos

Agora você provavelmente sente que sabe – tem uma vaga lembrança? – um bocado de testes de convergência/divergência e está pensando em como ficar de olho em todos eles.

Na verdade, eu apenas lhe dei dez testes ao todo – esse é um número inteiro, fácil de lembrar.

Primeiro temos as três séries com nomes: a série geométrica, a série-p e a série telescópica. Uma série geométrica converge se $0 < | r | < 1$. A série-p converge se
$p > 1$. Uma série telescópica converge se o segundo "meio termo" converge para um número finito.

Depois temos os três testes da comparação: da comparação direta, da comparação do limite e da comparação da integral. Todos os três comparam uma nova série a um padrão conhecido. Se o padrão convergir, então a série que você está investigando também converge; se o padrão divergir, a sua nova série também diverge.

Siga a bola

Existem paradoxos incontáveis envolvendo série infinita. Aqui está um dos meus favoritos. Digamos que você deixe cair uma bola a 1 metro acima do solo, e ela quica para cima até uma altura de meio metro, e depois continua a quicar para cima em exatamente metade da sua altura depois de cada quique. Qual a distância que ela viajará e quando ela vai parar de quicar? Descobrir a distância total é fácil. Primeiro, ignore temporariamente o 1 metro que a bola cai quando você a deixa cair. Depois ela quica pela primeira vez e sobe meio metro, e depois desce meio metro a um total de 1 metro. Depois do seu segundo quique, ela sobe a uma altura de um quarto de metro e depois desce em um quarto de metro a um total de meio metro, e assim sucessivamente. Isso lhe dá a série geométrica simples, 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... , que tem uma soma de $\frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Agora apenas some o 1 metro que você ignorou para a distância total de 3 metros.

E quando tempo vai levar para a bola parar de quicar? Essa pergunta é um pouco trapaceira porque envolve a aceleração devido à gravidade, aproximadamente 9,8 $\frac{\text{metros por segundo}}{\text{segundo}}$. Eu vou lhe poupar dos detalhes sangrentos. Se você fizer os cálculos, você obtém um tempo total de mais ou menos 2,63 segundos.

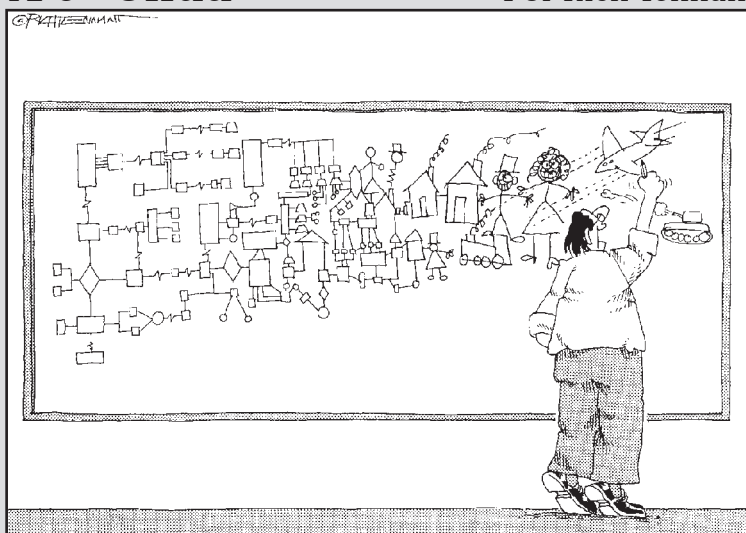
Mas espere um pouco, você diz. Como pode a bola parar de quicar se ela quica a cada vez que toca no chão? Boa pergunta. Esses paradoxos são bizarros. A bola quica, sim, todas as vezes que toca o chão e vai quicar um número infinito de vezes (de qualquer jeito a princípio, bolas reais não podem fazer isso porque não podem quicar, digamos, a altura do tamanho da largura de um átomo). Mas, no entanto, a bola viaja apenas uma distância *finita* e pára de quicar depois de uma quantia *finita* de tempo. Difícil de acreditar, mas é verdade. Se você não estiver acreditando, olhe dessa maneira. Você não tem nenhuma dúvida sobre Aquiles passando a tartaruga em uma distância finita de tempo, tem? (Se você se esqueceu sobre a corrida de Aquiles com a tartaruga, dê uma olhada de novo no Capítulo 2). Bem, o número finito de vezes que a bola quica é análogo ao número finito de fotos tiradas de Aquiles. Apesar de o número infinito de fotos, Aquiles passou definitivamente a tartaruga, e apesar de o número infinito de quiques, a bola pára de quicar.

E depois você tem os dois testes do "*R*": o teste da razão e o teste da raiz. Ambos analisam apenas a série em questão em vez de compará-la à série padrão. Ambas envolvem pegar um limite, e os resultados de ambas são interpretadas da mesma maneira. Se o limite for menor do que 1, a série converge; se o limite for maior do que 1, a série diverge; e se o limite for igual a 1, o teste é inconclusivo.

Finalmente, você tem dois testes que são apoio para os outros oito – o teste de divergência do n-ésimo termo e o teste da série alternada. Esses dois formam um par coerente. Você pode lembrar-se deles como sendo o teste de convergência do n-ésimo termo e o teste de divergência do n-ésimo termo. O teste da série alternada envolve mais do que apenas testar o n-ésimo termo, mas é uma boa ajuda para a memória.

Bem, aí está: Cálculo, ósculos e amplexos, chega!

Parte VI

A Parte dos Dez

Nesta parte...

Todo livro Para Leigos termina com divertidas listas dos dez mais. Eu lhe dou dez coisas para se lembrar, dez coisas para esquecer, e dez coisas com as quais você pode escapar se seu professor de cálculo tiver nascido ontem (meu favorito).

Capítulo 18

Dez Coisas para Lembrar

Neste Capítulo

- Conceitos críticos de cálculo (assim como o ícone que venho usando)
- Informação salva vidas (ou pelo menos salva nota)

Esse capítulo contém dez coisas que você deve definitivamente lembrar. Apenas dez – não é muito para pedir, é? Se sua cabeça já estiver cheia, você pode abrir espaço lendo primeiro o Capítulo 19, "Dez coisas para esquecer".

Seu Óculos de Sol

Se você vai ter que estudar cálculo, é bom que você esteja bem.

Se você usar óculos de sol *e um* protetor de bolso, vai arruinar o efeito.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Esse fator padrão é aparentemente encontrado em todos os lugares e um tanto onipresente; é usado em muitos problemas e esquecê-lo vai causar um grande número de erros. Em resumo, é importante. Não o esqueça.

$\frac{0}{5} = 0$, Mas $\frac{5}{0}$ é Indefinido

Você sabe que $\frac{8}{2} = 4$, e portanto 4 vezes 2 é 8. Se $\frac{5}{0}$ tivesse uma resposta, essa resposta vezes zero teria que ser igual a 5. Mas isso é impossível, fazendo $\frac{5}{0}$ ser indefinida.

Qualquer Coisa^0 = 1

A única exceção é 0^0, que é indefinido. A regra inclui *todo* o resto, incluindo números negativos e frações. Isso pode parecer um pouco estranho, mas é verdade.

SohCahToa

Não, não é um famoso chefe indígena, apenas um mnemônico para lembrar suas três funções trigonométricas básicas:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{O}{H}$$

$$\cos\theta = \frac{A}{H}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{O}{A}$$

Coloque-os de cabeça para baixo para as funções recíprocas:

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{H}{O}$$

$$\sec\theta = \frac{H}{A}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{A}{O}$$

Valores Trigonométricos para Ângulos de 30, 45, e 60 Graus

$$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg}45^\circ = 1 \qquad \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$$

Não há necessidade de decorar isso se você souber *SohCahToa* e os seus triângulos de 45° –45° –90° e 30° –60° –90°.

$sen^2 (\theta) + cos^2 (\theta) = 1$

Essa identidade é verdadeira para *qualquer* ângulo. Divida ambos os lados dessa equação pelo $sen^2 (\theta)$ e você obtém $1 + cot^2 \theta = cosec^2 (\theta)$; dividindo ambos os lados por $cos^2 \theta$ você tem $tg^2 \theta + 1 = sec^2 \theta$.

A Regra do Produto

$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$. Muito fácil.

A Regra do Quociente

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Ao contrário da regra do produto, muitos estudantes se esquecem da regra do quociente. Mas você não vai, se apenas se lembrar de começar a resposta com a derivada da parte superior da sua fração, u. Isso é fácil de lembrar porque é a maneira mais natural de começar. O resto se arruma.

Onde Você Coloca as Suas Chaves

Ninguém pode prever qual resultado você vai obter no seu próximo teste de cálculo – a não ser, isto é, que você não apareça.

Capítulo 19

Dez Coisas para Esquecer

Neste Capítulo

- Um aglomerado de erros comuns
- Alguns conceitos que você precisa tirar da sua cabeça

Este é sem dúvida nenhuma o capítulo mais fácil desse livro. Não há nada para estudar, nada para compreender, nada para aprender. Apenas relaxe, aumente o som, e esqueça essas coisas.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – Errado!

Não confunda isso com $(ab)^2 = a^2b^2$, que está *certo*. $(a + b)^2$ é igual a, é claro, $a^2 + 2ab + b^2$.

$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Errado!

Não confunda isso com $\sqrt{a^2b^2} = ab$, que é *certo*. $\sqrt{a^2 + b^2}$ não pode ser simplificado.

$\text{Inclinação} = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – Errado!

A inclinação está de cabeça pra baixo. A inclinação é igual a $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$\dfrac{3a + b}{3a + c} = \dfrac{b}{c}$ – Errado!

Você não pode cancelar $3a$ porque não é um *fator* do numerador e do denominador. Não confunda isso com $\frac{3ab}{3ac} = \frac{b}{c}$, no qual você *pode* cancelar o $3a$.

$\frac{d}{dx}\pi^3 = 3\pi^2$ – Errado!

Pi (π) é um número e não uma variável, então π^3 também é apenas um número, e a derivada de qualquer número é zero. Assim, $\frac{d}{dx}\pi^3 = 0$.

Se k For uma Constante, $\frac{d}{dx}kx = k'x + kx'$ – Errado!

Você não usa a regra do produto aqui. As constantes funcionam como números, não como variáveis, então $\frac{d}{dx}kx$ funciona exatamente como $\frac{d}{dx}3x$ que é igual a 3. Assim, $\frac{d}{dx}kx. = k$.

A Regra do Quociente é $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – Errado!

Veja o segundo ponto a partir do último no Capítulo 18, "Dez coisas para lembrar".

$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ – Errado!

Você Consegue ver por que isso está errado?

$\int (\text{sen}x)\, dx = \cos x + C$ – Errado!

A derivada do cosseno é o seno *negativo*, então a derivada do cosseno *negativo* é o seno, e assim $\int (\text{sen}x)\, dx = -\cos x + C$.

Teorema de Green

$$\int_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{fN}{fx} - \frac{fM}{fy}\right) dA$$

Esse aqui está *certo*, mas esqueça de tentar lembrar isso.

Capítulo 20

Dez Artimanhas que Não Enganarão o Seu Professor

Neste capítulo

- O que fazer se apesar de ler todo esse livro impressionante, você continuar a não entender cálculo.

O título original para esse capítulo era "Dez artimanhas com as quais você pode enganar o seu professor de cálculo se ele tiver nascido ontem", mas o departamento jurídico da editora ficou com medo de que alguém tentasse alguns desses truques na prática, fosse pego e então entrasse com uma ação judicial. Então eles mudaram o título para o título entediante que você tem agora. Os advogados querem que eu lhe diga isso: "As dez artimanhas com as quais você não pode enganar o seu professor supracitadas são descritas abaixo como se você realmente *pudesse* escapar de uma enrascada com elas. Isso é um exemplo de *sarcasmo* (definição – *sarcasmo*: irônico ou humor sarcástico). Essas dez artimanhas são listadas apenas com finalidade humorística, não como uma prescrição para o comportamento atual. Nós da Alta Books não apoiamos os estratagemas citados". Desculpe. Eles me forçaram a escrever isso.

Dê Duas Respostas em Perguntas de Prova

Se não conseguir decidir qual das duas respostas é a certa, anote as duas mais ou menos circuladas ou riscadas. Se uma das suas duas respostas estiver certa, seu professor vai lhe dar o benefício da dúvida.

Escreva de Forma Ilegível nas Provas

Obtenha uma resposta na sua calculadora e depois rabisque seu "cálculo" bem desarrumado de forma que seu professor não consiga ler. Porque você obteve a resposta certa, ele vai supor que você sabia o que estava fazendo e vai lhe dar o ponto todo da questão.

Não Mostre seu Cálculo em Provas

Obtenha uma resposta na sua calculadora e escreva o seguinte perto do problema: "Problema fácil – fiz os cálculos na minha cabeça". Seu professor vai levar em conta o que você disse.

Não Faça Todos os Problemas da Prova

Quem disse que você tem de fazer todos os problemas das provas? Se uma prova tem, digamos, quatro páginas longas e grampeadas juntas, encontre a página com os piores problemas, remova cuidadosamente o grampo, coloque a página ruim no seu bolso, e recoloque o grampo com cuidado. Seu professor vai supor que a página foi omitida no centro de cópias. Quando você mais tarde completar a parte "desaparecida" da prova e fizer todos os problemas perfeitamente, seu professor não vai suspeitar de nada.

Culpe seu Companheiro de Estudo Pela Sua Nota Baixa na Prova

Diga ao seu professor que a pessoa com a qual você estudou explicou tudo errado, então não é culpa sua. Seu professor vai deixar você refazer a prova.

Diga ao Seu Professor que Você Precisa de um "A" em Cálculo para Impressionar Sua Cara Metade

Seu professor, sendo no fundo um romântico – e lembrando seus dias como universitário quando tirou um dez na prova de cálculo e então se tornou um ímã de garotas – vai lhe dar o "A".

Reclame que Provas de Manhã Cedo Não São Justas Porque Você Não é Uma "Pessoa Matutina"

Explique que seu relógio biológico não está sincronizado com a ética protestante obsoleta de que Deus ajuda a quem cedo madruga da sua escola. Seu professor vai deixar que você faça todos os seus exames à tarde e vai confiar que você não falará com seus amigos que fazem os exames pela manhã.

Proteste Contra Toda Essa Ideia de Notas

Faça uma ofensiva política sobre professores com coragem de supor que têm o direito de lhe dar uma nota. Quem são eles para avaliarem *você*? Reivindique ser um opositor consciente quando se tratando de notas. Argumente que dar notas reflete um talento injusto e uma inteligência preconceituosa – que todo o sistema é baseado nas classes sociais e no QI das pessoas. Seu professor vai ficar impressionado com a sinceridade e profundidade das suas convicções filosóficas e vai deixar que você faça todos os seus exames na forma passou/reprovou.

Puxe o Alarme de Incêndio Durante a Prova

Esse aqui é um pouco infantil – ao contrário, é claro, das dicas anteriores.

Use esse Livro Como Desculpa

Se você for pego tentando qualquer um dos truques anteriores, diga ao seu professor que você pensou que podia fazer isso porque leu em um livro. Seu professor não vai castigar você.

Índice Remissivo

• A •

• G •

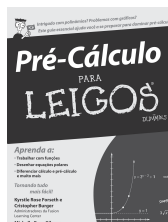
• J •

• L •

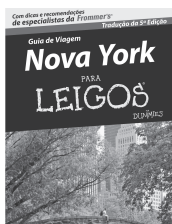
• U •

• Z •

Confira outros lançamentos!

Aprendendo Inglês como Segundo Idioma Para Leigos
Gavin Dudeney e Nicky Hockly
352 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-561-4

Pré-Cálculo para Leigos
Krystle Rose Forseth e outros
408 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-530-0

Poker para Leigos
Richard D. Harroch e Lou Krieger
300 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-556-0

Diabetes para Leigos
Alan L. Rubin
384 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-250-7

Nova York para Leigos
Myka Carroll
328 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-321-4

Inglês para Leigos 2ª Edição
Gail Brenner
368 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-476-1

História do Mundo para Leigos
Peter Haugen
400 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-435-8

PCs para Leigos
Dan Gookin
368 pág.
Formato 17x24cm
ISBN: 978-85-7608-254-5